

Transformando el conocimiento para enseñar matemáticas de docentes en formación de educación infantil a través del diseño de tareas

Ángel ALSINA

Nataly PINCHEIRA

Rosa DELGADO-REBOLLEDO

Datos de contacto:

Ángel Alsina
Universidad de Girona
angel.alsina@udg.edu

Nataly Pincheira
Universidad de Girona
nataly.pincheira@udg.edu

Rosa Delgado rebolledo
Universidad de Concepción
rosadelgadorebolledo@gmail.com

Recibido: 31/03/2023
Aceptado: 11/06/2023

RESUMEN

En este estudio se analiza la transformación de los conocimientos matemáticos acerca de los contenidos y de los conocimientos didácticos en torno a la planificación e implementación de actividades para la enseñanza de las matemáticas, que activan los docentes en formación de educación infantil cuando diseñan tareas de álgebra temprana. Se ha adoptado un paradigma investigativo mixto de carácter descriptivo, utilizando como técnica de investigación el análisis de contenido. En el estudio han participado 105 docentes en formación de educación infantil y la recolección de datos se ha realizado en una sesión de clase del plan de estudios. Los resultados obtenidos revelan que: 1) el conocimiento matemático que activan los docentes en formación en relación con los contenidos de álgebra temprana se asocia principalmente con las relaciones a partir del reconocimiento de atributos; 2) los conocimientos didácticos sobre la planificación e implementación de actividades para la enseñanza de las matemáticas responden a un contexto informal a partir del uso de material manipulativo. Se concluye que es necesario brindar experiencias de formación a los docentes, que les permitan avanzar hacia el desarrollo y transformación de los conocimientos matemáticos y didácticos para profundizar en la enseñanza del álgebra temprana en educación infantil.

PALABRAS CLAVE: conocimiento para enseñar matemáticas; álgebra temprana; docentes en formación; educación infantil.

Transforming the mathematics teaching knowledge of preservice early childhood education teachers through the design of tasks.

ABSTRACT

This study analyses the transformation of mathematical knowledge about content and pedagogical knowledge about the planning and implementation of mathematics classroom activities, activated by pre-service early childhood education teachers when designing early algebra tasks. A mixed descriptive research paradigm has been adopted, using content analysis as the research technique. The study involved 105 pre-service Early Childhood Education teachers and the data collection was carried out in a classroom session of the curriculum. The results obtained show that: 1) the mathematical knowledge activated by pre-service teachers in relation to early algebra content is mainly associated with relations based on the recognition of attributes; 2) pedagogical knowledge on the planning and implementation of classroom activities for the teaching of mathematics responds to an informal context based on the use of manipulatives. As a conclusion, it is necessary to provide training activities for pre-service teachers that allow them to advance towards the development and transformation of mathematical and pedagogical knowledge in order to deepen the teaching of early algebra in Early Childhood Education.

KEYWORDS: knowledge for teaching mathematics; early algebra; pre-service teachers; Early Childhood Education.

Introducción

La Didáctica de la Matemática (DDM) estudia e investiga los problemas que surgen en educación matemática y propone actuaciones fundadas para su transformación (Rico et al., 2000, p. 352). Desde esta perspectiva, dentro del conjunto de cuestiones que pueden investigarse, se pone el foco en la formación inicial en DDM de los futuros docentes de educación infantil y, más concretamente, indaga en la transformación de los conocimientos para enseñar matemáticas a través del diseño de tareas. De este modo, se pretende que los docentes en formación dejen atrás sus conocimientos intuitivos para enseñar matemáticas y avancen hacia conocimientos sustentados por la DDM, que conforman su conocimiento profesional. Lo anterior lo entendemos como la transformación del conocimiento.

Esta transformación implica acciones concretas que deben llevar a cabo simultáneamente los docentes en formación y los formadores, a partir de procesos de deconstrucción, co-construcción y reconstrucción (Alsina & Mulà, 2019). Según Alsina et al. (2019), por “deconstrucción” se entiende un proceso a partir del cual el docente en formación toma consciencia de los conocimientos cotidianos y busca alternativas

para su transformación; la “co-construcción” se concibe como un proceso social e interactivo en el que los docentes en formación comparten sus conocimientos cotidianos, con la mediación del formador, para fomentar el desarrollo de conocimiento profesional mediante la reflexión y la construcción colectiva; finalmente, por “reconstrucción” se entiende un proceso que conlleva la transformación del conocimiento cotidiano en conocimiento profesional a través del contraste. Desde este marco, la formación inicial en DDM de los futuros docentes de educación infantil toma importancia ya que es necesario que posean los conocimientos matemáticos y didácticos que les permitan crear oportunidades para que los estudiantes de 0 a 6 años desarrollen su pensamiento matemático (Alsina, 2019).

En línea con lo anterior, dentro del conjunto de conocimientos matemáticos y didácticos descritos por los diversos modelos de conocimiento del profesorado de matemáticas (e.g., Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018; Rowland et al., 2005), este estudio considera la caracterización de los conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil de Alsina y Delgado (2022). Esta propuesta, sin desmerecer el resto de modelos, intenta integrar los componentes ya encontrados en la literatura, considerando las características propias de la educación matemática infantil (e.g., Alsina, 2020; Muñoz-Catalán, 2018).

De acuerdo con lo anterior, se analizan los conocimientos matemáticos de futuros docentes acerca de los contenidos matemáticos y los conocimientos didácticos en torno a la planificación e implementación de actividades. Se pone el foco en los conocimientos sobre álgebra temprana, tanto por su reciente incorporación en los currículos de las primeras edades (Pincheira & Alsina, 2021), como por su rol relevante en el desarrollo de habilidades matemáticas (Clements & Sarama, 2015). Adicionalmente, se indaga en la transformación del conocimiento a partir del diseño de tareas matemáticas. En este sentido, siguiendo a Sullivan et al. (2013), las representaciones, el contexto, las preguntas e instrucciones de las tareas aportan información en torno al trabajo con el alumnado, por lo cual el diseño de tareas matemáticas forma parte del desarrollo de la práctica docente para organizar la enseñanza (Pincheira & Alsina, 2022).

Considerando estos antecedentes, nos preguntamos ¿qué conocimientos matemáticos y didácticos activan los docentes en formación de educación infantil cuando diseñan tareas de álgebra temprana? Considerando que el diseño de dichas tareas es una herramienta que contribuye al desarrollo y a la transformación del conocimiento profesional docente, los objetivos del estudio son: 1) analizar los conocimientos matemáticos (de álgebra temprana) activados en el diseño de las tareas; 2) analizar los conocimientos didácticos en torno a la planificación e implementación de actividades para la enseñanza de las matemáticas en el diseño de las tareas algebraicas.

Conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil

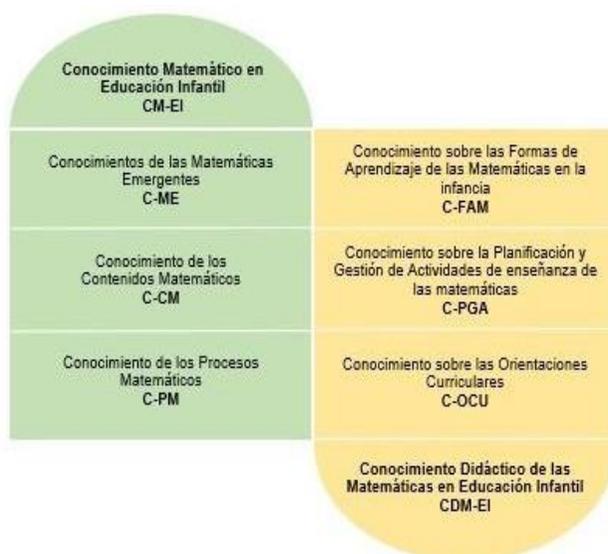
El análisis y la transformación, en el sentido de mejora, de los conocimientos del profesorado de infantil para enseñar matemáticas es una de las agendas de investigación que deberían priorizarse en las próximas décadas dentro de la

investigación en educación matemática infantil (Alsina, 2019), ya que estos conocimientos condicionan la práctica docente del profesorado e influyen en lo que el alumnado aprende (y lo que no aprende).

Si bien es cierto que se ha ido incrementando el interés por esta agenda de investigación, los estudios que han analizado el conocimiento del profesorado de infantil para enseñar matemáticas son todavía escasos (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2016). En Alsina y Delgado (2022) se presenta una revisión de estudios empíricos (e.g., Lee, 2010; Gasteiger et al., 2018; Hundeland et al., 2017; McCray & Chen, 2012; Mosvold et al., 2011; Muñoz-Catalán et al., 2019; Opperman et al., 2016) que han sido realizados desde nociones generales como el conocimiento pedagógico del contenido matemático (PCKM, por sus siglas del inglés), basado en la noción de conocimiento pedagógico del contenido (Shulman, 1986), o modelos específicos para el profesorado de matemáticas (e.g., *Mathematical Knowledge for Teaching* [MKT] propuesto por Ball et al., 2008; *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* [MTSK] de Carrillo et al., 2018; y *Knowledge Quartet* [KQ] planteado por Rowland et al., 2005). A partir de dicha revisión, los autores señalan que los principales componentes del conocimiento del profesorado de infantil se relacionan con el contenido y los procesos matemáticos, la forma en que aprende el alumnado y cómo se enseñan las matemáticas. De acuerdo con esta revisión y las aportaciones de los modelos de conocimiento para enseñar matemáticas, Alsina y Delgado (2022) han caracterizado el conjunto de conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil (Figura 1).

Figura 1

Conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil. Fuente: Alsina y Delgado (2022, p. 26)



Esta caracterización que, como se ha indicado, parte de las aportaciones y la estructura de los principales modelos de conocimiento del profesorado para enseñar matemáticas (e.g, MKT y MTSK), considera dos tipos de conocimientos interrelacionados: 1) Conocimiento Matemático en Educación Infantil; y 2) Conocimiento Didáctico de las Matemáticas en Educación Infantil.

El Conocimiento Matemático en Educación Infantil considera tres subtipos referidos a las matemáticas emergentes, los contenidos y los procesos matemáticos:

Conocimiento de las matemáticas emergentes (C-ME): se refiere al conocimiento que posee el profesorado en torno a los primeros conocimientos matemáticos que los estudiantes empiezan a desarrollar a partir de experiencias no escolares. Geist (2014) las denomina matemáticas emergentes por su carácter iniciático, mientras que otros autores y organismos las conceptualizan como matemáticas intuitivas (Fischbein, 1987), para remarcar su carácter autoevidente, basado en la certeza intrínseca, más global, metafórico y no analítico. También se le ha denominado matemáticas informales (Baroody, 1987), al desarrollarse en un entorno no escolar, a partir de las interacciones con el medio físico y social, donde se presentan escenarios como los juegos que generan aprendizajes de una manera natural y espontánea. Alsina (2015), Geist (2014) o Clements y Sarama (2015), entre otros, han explicitado estos conocimientos emergentes, de naturaleza intuitiva e informal. Por ejemplo, el conocimiento de los profesores de las matemáticas presentes en situaciones de juego (Opperman et al., 2016) forma parte de este tipo de conocimiento.

Conocimiento de los contenidos matemáticos (C-CM): se refiere al conocimiento profesional en torno a los saberes matemáticos en infantil, considerado en todos los estudios revisados por Alsina y Delgado (2022). Incluye: Números y operaciones, Álgebra Temprana, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad (e.g., Alsina, 2022a; Castro & Castro, 2016; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2003). Además, considera el conocimiento de relaciones entre contenidos matemáticos denominadas conexiones intradisciplinarias (Alsina, 2014), considerando dos aspectos esenciales: por un lado, desde una perspectiva transversal, estas relaciones deben dirigirse a la esencia de la propia matemática y sus conceptos; por otro lado, desde una perspectiva longitudinal, deben tenerse presentes los vínculos de los contenidos matemáticos en infantil con la matemática de niveles superiores para construir sus cimientos, sin que ello signifique que los contenidos matemáticos de infantil sean una preparación para etapas posteriores, puesto que tienen su propia finalidad (Alsina, 2020; Muñoz-Catalán, 2018).

Conocimiento de los procesos matemáticos (C-PM): considerando la descripción de los procesos matemáticos en infantil (Alsina, 2014; NCTM, 2003), este subtipo se refiere a conocimientos clave del profesorado de esta etapa sobre: 1) resolución de problemas: conceptualización y tipos de problemas en las primeras edades, 2) razonamiento y prueba: naturaleza de las hipótesis, las conjeturas y los razonamientos (sobre todo inductivos) para empezar a predecir y generalizar; el tipo de argumentación matemática en infantil o la comprobación (más que la demostración o prueba); 3) comunicación: tipos de interacción en el aula, tipos de lenguaje (oral, gesticular, gráfico, concreto y /o simbólico) para comunicar ideas matemáticas; 4) conexiones: con otras disciplinas, denominadas también conexiones interdisciplinarias y con el entorno; 5) representación: representaciones concretas (dibujos), pictóricas (signos) y/o simbólicas (notación convencional). Como en el caso del conocimiento de

los contenidos matemáticos, en el conocimiento de los procesos matemáticos deben considerarse también las dos perspectivas: transversal, teniendo presente el rol específico de los procesos matemáticos infantiles en la esencia de la propia disciplina; y longitudinal, de manera que se tenga conocimiento de los vínculos de los procesos matemáticos infantiles con los procesos matemáticos de niveles superiores.

El Conocimiento Didáctico de las Matemáticas en Educación Infantil (CDM-EI) incluye tres subtipos que responden a cómo se adquiere el conocimiento matemático en infantil y cómo se enseñan las matemáticas en este nivel:

Conocimiento sobre las formas de aprendizaje de las matemáticas en la infancia (C-FAM): este subtipo se refiere al conocimiento profesional del profesorado de infantil en torno a cómo se aprenden las matemáticas, un conocimiento que ha sido abordado por disciplinas como la psicología del aprendizaje humano, la psicología evolutiva, la pedagogía o la propia matemática. Sintéticamente, estas aportaciones han determinado que se empieza a desarrollar el pensamiento matemático a partir de acciones que se circunscriben, primero, en la visualización de las ideas matemáticas de manera concreta, a partir de la exploración y la manipulación, principalmente. Luego, se empiezan a representar mentalmente las ideas matemáticas y se avanza hacia la esquematización, la modelización y la formalización del conocimiento matemático. Por ejemplo, el conocimiento de las formas de conteo que utilizan los niños (Hundeland et al., 2017) es parte de este subtipo.

Conocimiento sobre la planificación y gestión de actividades de enseñanza de las matemáticas (C-PGA): se refiere, en primer lugar, a los conocimientos en torno al diseño de tareas a través de diversos recursos para promover el desarrollo del pensamiento matemático en infantil (planificación de la enseñanza). Desde la perspectiva de Alsina (2022a) estos recursos se organizan a partir del principio de abstracción progresiva, tomando como referencia los niveles de comprensión del conocimiento matemático (Freudenthal, 1991), que van desde el nivel referencial hasta el formal: a) contextos informales (situaciones reales o realistas, materiales manipulativos y juegos); b) contextos intermedios (recursos literarios como cuentos y canciones o recursos tecnológicos como *applets*); c) contextos formales (fichas y los libros de texto). En segundo lugar, el C-PGA se refiere al conocimiento en torno a las acciones que lleva a cabo el profesorado para promover el desarrollo del pensamiento matemático infantil (gestión de la enseñanza). El NCTM (2003), por ejemplo, impulsa una enseñanza de las matemáticas en infantil que promueva el desarrollo de procesos matemáticos.

Conocimiento sobre las orientaciones curriculares (C-OCU): se refiere a los conocimientos acerca del currículo, tanto en lo que respecta a las bases psicopedagógicas sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje, la organización de la educación infantil y la evaluación como elemento indisociable del proceso de enseñanza-aprendizaje. Desde esta perspectiva, la principal diferencia de la educación infantil respecto a las otras etapas escolares radica en el hecho de que, en muchos países, en el currículo de infantil, las matemáticas no tienen una sección específica, sino que forman parte de áreas más globales.

Álgebra temprana y diseño de tareas

El álgebra temprana (*Early algebra*) emerge como una propuesta de cambio curricular, que pretende introducir el desarrollo del pensamiento algebraico a partir

de los primeros años (Carraher & Schliemann, 2007; Kaput et al., 2008). El propósito de esta iniciativa es asegurar una mejor comprensión de las matemáticas en las etapas educativas posteriores (Cai & Knuth, 2011). De acuerdo con Kieran (2022), el pensamiento algebraico es un tipo de razonamiento en el que participan los estudiantes a medida que construyen el significado de los objetos y las formas de pensar que se encontrarán en el estudio posterior del álgebra de la escuela secundaria. Así, el álgebra temprana promueve modos de pensamiento que atienden a la estructura que subyace a las matemáticas, a través de tareas dirigidas a la observación de patrones, relaciones y estructuras matemáticas (Blanton & Kaput, 2005). A su vez, Knuth et al. (2016) aseguran que el álgebra temprana “proporciona las herramientas matemáticas para representar y analizar relaciones cuantitativas, modelar situaciones y resolver problemas en todos los dominios matemáticos” (p. 65). Por tanto, su enseñanza permea en otros bloques de contenido como la numeración, el cálculo, la geometría, etc.

Los resultados de diversas investigaciones en torno al álgebra temprana en infantil han apuntado, hasta el momento, tres grandes tipos de conocimientos. Primero, emergen a partir de los conocimientos físicos que adquieren los niños y las niñas en los primeros años a través de la manipulación, permitiendo construir relaciones de carácter cualitativo y cuantitativo, al comparar elementos por medio de semejanzas o diferencias (Alsina, 2022a). En este contexto, el reconocimiento de atributos juega un papel fundamental para establecer relaciones de clasificación, ordenación y correspondencia, entre otras (NCTM, 2003), permitiendo indagar en el pensamiento relacional (Lenz, 2022).

Segundo, los patrones de repetición promueven la adquisición de habilidades vinculadas al pensamiento recursivo y funcional (Lüken & Sauzet, 2020). Para alcanzar tales habilidades, se requiere de la implementación de diversas tareas: a) duplicar el mismo patrón; b) encontrar elementos faltantes de una secuencia; c) ampliar una secuencia; d) construir el mismo patrón con diferentes elementos; e) identificar la unidad de repetición y; f) inventar un patrón (Acosta et al., 2022; Pincheira et al., 2022).

Además, la noción de cambio entendida desde una perspectiva amplia como una transformación a partir de un operador es considerada por el NCTM (2003), un conocimiento importante del álgebra en educación infantil, puesto que ayuda a tener una base para aplicar las matemáticas y comprender el mundo. Desde una perspectiva genérica, las ideas sobre cambio y las relaciones que se establecen entre los cambios, se abordan en el marco del pensamiento funcional (Warren & Cooper, 2005). Desde este marco, Pincheira y Alsina (2021) han caracterizado los conocimientos matemáticos que fomentan el desarrollo del pensamiento algebraico en educación infantil a partir de tres categorías: a) relaciones (clasificaciones, ordenaciones, correspondencias, etc.), a partir del reconocimiento de atributos al experimentar con elementos u objetos; b) seriaciones a partir de patrones de repetición y; c) cambios cualitativos y cuantitativos.

No obstante, para asegurar en el éxito de tales conocimientos, se requiere contar con profesores capaces de diseñar tareas y brindar oportunidades a través de las experiencias de aula, que promuevan el desarrollo del pensamiento algebraico a través del proceso de generalización, fomentando la capacidad de pensar estructuralmente (Stephens et al., 2015). En este sentido, para propiciar la enseñanza del álgebra temprana, es necesario que el profesorado considere el diseño e implementación de

tareas que permitan a los estudiantes pensar profundamente en las relaciones, patrones y el cambio (Twohill et al., 2019). De acuerdo con Thanheiser (2015), a partir de las tareas que diseña el profesorado deja en evidencia el conocimiento que posee y la percepción sobre el aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Por tanto, diseñar una tarea algebraica temprana contribuye a mejorar el conocimiento matemático del profesorado y su capacidad de diseño didáctico-matemático (Pepin, 2015). Sin embargo, el diseño de dichas tareas constituye un proceso recursivo que implica tanto la creación de tareas completamente nuevas como la adaptación o refinamiento de tareas existentes (Liljedahl et al., 2007).

Método

De acuerdo con los objetivos del estudio, se ha adoptado un paradigma investigativo mixto de carácter descriptivo (Creswell, 2014). Para ello, se ha utilizado la técnica de análisis de contenido, puesto que es “una técnica de investigación que permite hacer inferencias replicables y válidas a partir del texto (u otra materia significativa) a los contextos de su uso” (Krippendorff, 2013, p. 24), en nuestro caso las producciones escritas propuestas por el profesorado en formación.

Para efectuar el análisis de las tareas diseñadas por los docentes en formación se han considerado las siguientes etapas:

1. Lectura individual de cada una de las tareas matemáticas para explorar y organizar la información presente en cada una de ellas.
2. Establecer categorías de análisis que obedecen a la caracterización conocimientos para Enseñar Matemáticas en Educación Infantil propuesta por Alsina y Delgado (2022). Para ello, se han considerado un conjunto de indicadores que permiten orientar el análisis de contenido, con base a dos subtipos de conocimientos de la caracterización: a) conocimientos de los contenidos matemáticos; y, b) conocimiento sobre la planificación y gestión de actividades de enseñanza.
3. Codificar las tareas matemáticas con base a los indicadores propuestos.
4. Sistematizar la información obtenida a través de tablas estadísticas, cuya lectura facilita el análisis descriptivo y la obtención de conclusiones.
5. Seleccionar ejemplos de tareas que evidencien las categorías de análisis.

Participantes y contexto

En este estudio han participado 105 estudiantes españoles del Grado de Maestro de educación infantil. La muestra ha sido escogida a través de un muestreo no probabilístico de carácter accidental o causal, puesto que el criterio de selección ha sido determinado por la posibilidad de acceder a este grupo.

Los participantes cursaban la asignatura “Aprendizaje de las matemáticas”, de 2º curso. En esta asignatura, los docentes en formación profundizan en el diseño curricular de las matemáticas de educación infantil (3-6 años) y análisis de los contenidos y procesos matemáticos que lo integran, así como el desarrollo de estrategias metodológicas para adecuar la enseñanza de las matemáticas en el estadio evolutivo.

Durante dos sesiones de 90 minutos se plantea a los participantes conformar

equipos y diseñar tres tareas matemáticas que promuevan la enseñanza del álgebra temprana, orientadas a niños y niñas de 3 a 5 años. Para ello, la instrucción es describir las tareas, considerando la gestión que se debe realizar y el planteamiento de preguntas para favorecer la comprensión. Las tareas diseñadas por los docentes en formación conforman las unidades de análisis del estudio.

Categorías e indicadores de análisis

Para realizar el estudio, las unidades de análisis se han examinado con base en la caracterización de conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil (Alsina & Delgado, 2022), centrándonos en dos subtipos de conocimientos, como se ha señalado: a) conocimientos de los contenidos matemáticos; y, b) conocimiento sobre la planificación y gestión de actividades de enseñanza.

En la Tabla 1 se muestran las categorías de conocimiento de los contenidos de álgebra temprana usados, a partir de la caracterización de Pincheira y Alsina (2021) y sus respectivos indicadores (Pincheira et al., 2022).

Tabla 1

Categorías e indicadores del conocimiento de los contenidos de álgebra temprana

Caracterización del álgebra temprana en educación infantil	Indicador
Relaciones a partir del reconocimiento de atributos	1. Reconocimiento de atributos de elementos u objetos
	2. Agrupación de elementos a partir de la identificación de sus propiedades
	3. Clasificación de elementos a partir de criterios cualitativos y/o cuantitativos
	4. Ordenación de objetos de manera ascendente o descendente
	5. Relación de correspondencia a partir del reconocimiento de atributos
	6. Comparación de elementos a partir de criterios cualitativos y/o cuantitativos
Seriaciones a partir de patrones de repetición	7. Copia del patrón a partir de una secuencia
	8. Identificación de elementos faltantes en una secuencia
	9. Ampliación de una secuencia
	10. Construcción del mismo patrón con diferentes elementos
	11. Identificación de la unidad de repetición de un patrón
Cambios cualitativos y cuantitativos	12. Creación de un patrón a partir de elementos determinados
	13. Reconocimiento de cambios cualitativos
	14. Reconocimiento de cambios cuantitativos
	15. Aplicación de cambios cualitativos
	16. Aplicación de cambios cuantitativos

Los conocimientos sobre la planificación y gestión de actividades de enseñanza se han analizado a partir de los indicadores propuestos en la Tabla 2, que tiene relación con los contextos de enseñanza que debe activar el profesorado para desarrollar la tarea. Tales indicadores emergen del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (Alsina, 2022a).

Tabla 2

Categorías e indicadores del conocimiento sobre la planificación y gestión de actividades de enseñanza utilizados en el proceso de codificación de las tareas

Contextos		Indicador
Contexto informal	Situaciones reales	1. Una situación del entorno inmediato de los niños (contexto local: el propio hogar, la escuela, etc.) 2. Una situación que no forma parte del entorno cercano de los niños (contexto global: un circo, un museo, etc.)
	Material manipulativo	3. Un material lógico estructurado comercializado o previamente diseñado (los Bloques Lógicos de Dienes, etc.) 4. Otros materiales no estructurados comercializados, previamente diseñados o inespecíficos (cubos y palas, etc.)
	Juegos	5. Una situación de juego simbólico 6. Un juego de mesa 7. Un juego de patio 8. Otro tipo de juego
Contexto intermedio	Recursos literarios	9. Una canción 10. Un cuento 11. Otro recurso literario: adivinanzas, refranes, etc.
	Recursos tecnológicos	12. Una aplicación informática 13. Un robot educativo programable 14. Otro tipo de recurso tecnológico
Contexto formal	Recursos gráficos	15. Una ficha 16. Un libro de texto

Procedimiento de análisis

Las unidades de análisis corresponden a un total de 96 tareas matemáticas que se han codificado a partir de los indicadores propuestos. Para ello, se han asignado puntuaciones en caso de presencia (1) o ausencia (0) en cada una de las tareas.

La codificación de los datos fue realizada por los autores. Para garantizar la confiabilidad del proceso de codificación, se ha realizado un proceso de calibración a través de sesiones de codificación conjunta y discusión de los desacuerdos, hasta establecer un consenso. Luego, se ha realizado la codificación de los datos de manera individual.

Finalmente, se ha determinado el índice Kappa de Fleiss para cuantificar el grado de concordancia entre las codificaciones, obteniendo un valor de 0.86, lo que se considera una fuerza de concordancia “muy buena” (Altman, 1991).

Resultados

A continuación, se describen los datos obtenidos a partir de los subtipos de conocimientos para enseñar matemáticas en infantil considerados en el estudio.

Conocimiento de los contenidos matemáticos (C-CM)

Para identificar el C-CM que activan los docentes en formación al diseñar tareas de álgebra temprana, se ha prestado especial atención al enunciado e instrucción de la tarea, así como las preguntas que se plantean para resolverla.

La Tabla 3 presenta la distribución del C-CM de álgebra temprana en infantil presentes en las tareas.

Tabla 3

Distribución por porcentaje del C-CM que caracteriza el álgebra temprana en educación infantil

Caracterización del álgebra temprana en educación infantil	3 años (n=32)	4 años (n=32)	5 años (n=32)	Total (n=96)
Relaciones a partir del reconocimiento de atributos	93.8	62.5	31.2	62.5
Seriaciones a partir de patrones de repetición	6.2	15.6	6.3	9.4
Cambios cualitativos y cuantitativos	-	21.9	62.5	28.1

A nivel general, se observa un predominio del C-CM vinculado a las relaciones a partir del reconocimiento de atributos, con una presencia del 62.5%, seguido de conocimientos que profundizan en cambios cualitativos y cuantitativos con un 28.1%. Sin embargo, se observa un tratamiento limitado de los conocimientos de seriaciones a partir de patrones de repetición (9.4%).

Por otra parte, en las tareas diseñadas para niños y niñas de tres y cuatro años, predominan los conocimientos sobre las relaciones a partir del reconocimiento de atributos. Mientras que en las tareas dirigidas a estudiantes de cinco años predominan el conocimiento de cambios cualitativos y cuantitativos. Cabe destacar que, en las tareas para estudiantes de tres años, se evidencia una ausencia de conocimientos de cambios cualitativos y cuantitativos.

La Tabla 4, muestra de manera más específica la predominancia de los indicadores que se han considerado para precisar el C-CM de álgebra temprana (Tabla 2) en las tareas analizadas según edad.

Tabla 4

Distribución por porcentaje de los indicadores que caracterizan las tareas matemáticas de álgebra temprana en educación infantil en relación con el total de tareas analizadas por edad

Caracterización del álgebra temprana en educación infantil	indicadores	3 años	4 años	5 años
Relaciones a partir del reconocimiento de atributos	1	40.6	19	12.5
	2	18.8	21.9	-
	3	28.1	9.4	6.3
	4	3.1	3.1	3.1
	5	9.4	18.8	9.4
	6	40.6	21.9	12.5
Seriaciones a partir de patrones de repetición	7	-	-	-
	8	-	3.1	6.3
	9	6.3	9.4	6.3
	10	-	3.1	-
	11	-	6.2	-
	12	-	6.2	3.1
Cambios cualitativos y cuantitativos	13	-	6.2	43.8
	14	-	3.1	9.4
	15	-	18.8	43.8
	16	-	-	6.3

En el caso de las tareas diseñadas para niños y niñas de 3 años, predominan los indicadores 1 y 6, asociados con el reconocimiento de atributos de elementos u objetos y la comparación de elementos a partir de criterios cualitativos o cuantitativos, respectivamente, con una presencia del 40.6% en ambos casos. En esta misma línea de conocimientos, en las tareas para estudiantes de cuatro años, destacan los indicadores 2 vinculado con la agrupación de elementos e indicador 6 asociado con la comparación de elementos a partir de criterios cualitativos o cuantitativos, con una presencia del 21.9% en ambos indicadores. Por último, en las tareas para estudiantes de cinco años predomina el conocimiento en torno a los cambios cualitativos o cuantitativos, destacando los indicadores 13 (43.8%) y 15 (43.8%), que tienen relación con el reconocimiento y aplicación de cambios cualitativos, respectivamente.

Conocimiento sobre la planificación y gestión de actividades de enseñanza (C-PGA)

Para establecer el C-PGA se ha analizado el contexto de enseñanza, prestando especial atención a la situación o recurso que se utiliza en la implementación de las tareas matemáticas que diseñan los docentes en formación. Cabe destacar que una misma tarea matemática se puede situar en más de un contexto de enseñanza.

En la Tabla 5, se muestra la distribución de los contextos de enseñanza que se activan en las tareas matemáticas.

Tabla 5

Distribución por porcentaje del C-PGA

Contextos		3 años (n=32)	4 años (n=32)	5 años (n=32)	Total (n=96)
Contexto informal	Situaciones reales	9.4	3.1	3.1	5.2
	Material manipulativo	71.9	81.3	71.9	75
	Juegos	3.1	6.3	-	3.1
Contexto intermedio	Recursos literarios	9.4	6.3	21.9	12.5
	Recursos tecnológicos	12.5	9.4	18.8	13.5
Contexto formal	Recursos gráficos	6.3	3.1	3.1	4.2

A nivel general, se aprecia una mayor concentración de tareas que se desarrollan en el contexto informal, con un 83.3%, destacando las tareas que requieren del uso de manipulativos (75%). Siguen las tareas que se sitúan en un contexto intermedio con una presencia del 26%. Por último, se observa una menor presencia de tareas que se sitúan en el contexto formal, con un 4.2%.

Asimismo, se observa que, en las tareas diseñadas para niños de tres, cuatro y cinco años, predomina el uso de material manipulativo en el contexto informal, por sobre los otros contextos de enseñanza. Mientras que, en el contexto intermedio, las tareas destinadas a tres y cuatro años predominan el uso de recursos tecnológicos, y en las tareas de cinco años predomina el uso de recursos literarios.

De manera más específica, desde la perspectiva de los indicadores que se han considerado para profundizar en el conocimiento sobre la planificación y gestión de actividades de enseñanza (Tabla 2), es posible observar en la Tabla 6 los indicadores que predominan en cada contexto de enseñanza según edad.

Tabla 6

Distribución por porcentaje de los indicadores sobre el C-PGA en relación con el total de tareas analizadas por edad

Contextos		Indicadores	3 años	4 años	5 años
Contexto informal	Situaciones reales	1	9.4	3.1	3.1
		2	-	-	-
	Material manipulativo	3	43.8	62.5	65.6
		4	28.1	18.8	6.3
	Juegos	5	-	-	-
		6	3.1	6.3	-
		7	-	-	-
		8	-	-	-
Contexto intermedio	Recursos literarios	9	-	-	3.1
		10	9.4	6.3	18.8
	Recursos tecnológicos	11	-	-	-
		12	9.4	3.1	9.4
Contexto formal	Recursos tecnológicos	13	0	3.1	6.3
		14	3.1	3.1	3.1
	Recursos gráficos	15	6.3	3.1	3.1
		16	-	-	-

En las tareas diseñadas para niños y niñas de 3 y 4 años se evidencia principalmente el contexto informal a partir del uso de material manipulativo, donde predomina el indicador 3 vinculado a un material lógico estructurado comercializado o previamente diseñado, con una presencia del 43.8% y 62.5%, respectivamente. Le sigue el indicador 4, relacionado con otros materiales no estructurados comercializados, previamente diseñados o inespecíficos, alcanzando una presencia del 28.1% y 18.8%, respectivamente.

En el caso de las tareas diseñadas para niños y niñas de 5 años, se proponen principalmente en un contexto informal. Al igual que en las tareas para estudiantes de tres y cuatro años, predomina el indicador 3, con un 65.6%. A su vez, se evidencia el diseño de tareas en el contexto intermedio, a través de un recurso literario, como es un cuento (indicador 10), con una presencia del 18.8%.

A modo de ejemplo, en las Figuras 2, 3 y 4, se presentan tareas matemáticas diseñadas por los docentes en formación para niños y niñas de educación infantil. Los criterios de selección de los ejemplos han sido: a) de diferentes edades (3, 4 y 5 años); b) de distintos contenidos asociados al álgebra temprana en educación infantil; c) de diversos contextos de enseñanza.

Figura 2

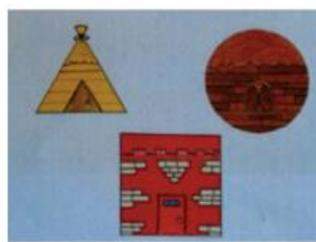
Ejemplo de tarea matemática diseñada para niños y niñas de 3 años

Los tres cerditos

Se explica la adaptación del cuento los tres cerditos, profundizando en los atributos de cada cerdito y de sus respectivas casas. Seguidamente, se reparten 4 tipos de tarjetas con las características de los diferentes cerditos y casas, fomentando la manipulación del material.

- Color de camisetas de los cerditos y de las casas (rojo, café y amarillo)
- Tamaño de los cerditos y de las casas (grande, pequeño y mediano)
- Forma de las figuras de la ropa de los cerditos y de las casas (círculo, triángulo y cuadrado)
- Material de la casa (paja, madera y ladrillos)

El maestro formula preguntas para que los alumnos identifiquen y reconozcan cuáles son los atributos que definen cada tarjeta. Es necesario que el maestro formule preguntas con cada tipo de atributo.



Preguntas

- ¿Qué cerdito lleva la camiseta de color amarillo/café/rojo?
- ¿Qué casa está pintada de color amarillo/café/rojo?
- Tenemos estos tres cerditos. ¿Cuál es el más grande/pequeño?
- Tenemos estas tres casas. ¿Cuál es la más grande/pequeña?
- ¿Qué cerdito lleva en su camiseta círculos/triángulos/cuadrados?
- De estas tres casas, ¿cuál es la que tiene forma de círculo/triángulo/cuadrado?
- De estas tres casas, ¿cuál es la que está hecha de paja/madera/ladrillo?

La tarea matemática que se muestra en la Figura 2 permite reconocer distintas cualidades sensoriales y sus atributos, y establecer unas primeras relaciones entre ellos. El desarrollo de la tarea, pues, implica la comparación de elementos considerando diferentes criterios cualitativos que responden al color, tamaño, forma y materiales de los objetos involucrados en la tarea.

La tarea se plantea en un contexto intermedio, a través de la adaptación de un recurso literario, como es el cuento de los tres cerditos. Posteriormente, interviene un contexto informal, con el uso de un material lógico estructurado previamente diseñado, como son las tarjetas que representan los elementos del cuento.

Figura 3

Ejemplo de tarea matemática diseñada para niños y niñas de 4 años

Representando seriaciones con el cuerpo

Durante esta actividad todos los alumnos trabajan en grupo y se comunican entre ellos para representar la seriación y saber donde ubicarse.

Para comenzar la actividad el docente dibuja una línea en el suelo que es donde se tendrán que ubicar los niños para hacer la seriación. A partir de aquí, el docente dice una seriación que los alumnos deben formar, por ejemplo: niño- niña-niño-niña-niño-niña

El docente pregunta: ¿cómo deben ubicarse para continuar la serie?, ¿cuál es el patrón de la serie?

Posteriormente, el docente tapa los ojos a los alumnos y los ubica en un orden determinado, por ejemplo: niño-niño-niña-niño-niño-niña-niño-niña. Cuando todos los alumnos estén ubicados, se destapan los ojos y hablando entre ellos deben ser capaces de identificar ¿quién falta en el espacio vacío? ¿por qué?

En la tarea de la Figura 3 se abordan las seriaciones con patrones de repetición, requiriendo ampliar una secuencia e identificar elementos faltantes de una secuencia. Para ello, se plantea la tarea en un contexto informal a través de una situación real que forma parte del entorno inmediato de los niños, como es el representar seriaciones a partir de un patrón AB con su propio cuerpo.

Figura 4

Ejemplo de tarea matemática diseñada para niños y niñas de 5 años

¿Qué ha cambiado?

Los niños se sentarán en círculo y trabajaremos en gran grupo.

La maestra presentará una pecera con diferentes tipos de peces y unas tarjetas con diferentes cualidades de los peces (una hace referencia al color, otra si es brillante o no, si tiene rayas, círculos o nada, y si tiene burbujas). Luego, explicará que estas tarjetas sirven para cambiar las cualidades de los peces y que desde la pecera iremos recibiendo indicaciones sobre el tipo de pez que se debe pescar.

A partir de las preguntas que hará la maestra los niños deberán decir la respuesta sobre cual es el pez que creen que deberán de pescar. En caso de no ser correcto, la maestra hará preguntas para que puedan descubrir cual es.

Preguntas:

Si la pescadería nos envía un pez verde, brillante, con rayas y burbujas, y una tarjeta con puntitos brillantes que significa que cambia el tipo de piel del pez (si es brillante o no):

¿Qué pez tendremos que pescar? ¿Por qué?

¿Podemos pescar un pez rojo, no brillante con rayas y burbujas?

¿Podemos pescar un pez verde, brillante con puntitos y burbujas?

¿Por qué no podemos pescar un pez verde, no brillando con puntitos y burbujas?



Si la pescadería había pedido un pez verde, brillante, de rayas y con burbujas, pero han recibido un pez naranja, brillante con rayas y burbujas:

¿Que ha cambiado?

¿Qué tarjeta tendremos que coger para explicar lo que ha cambiado?

Si hubieran recibido un pez verde, brillante, con puntitos y burbujas, ¿qué ha cambiado?



Finalmente, en la tarea de la Figura 4 se aborda el cambio: concretamente, se deben aplicar cambios cualitativos a través de un operador y reconocer las características que han cambiado (por ejemplo, cambia el color). Para ello, se plantea la tarea en un contexto informal a través de material manipulativo estructurado previamente diseñado, como es la pecera y los peces (de colores, tamaños y estampados diferentes).

Consideraciones finales

En este estudio se ha analizado la transformación de los conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil a partir del diseño de tareas, considerando que el diseño de tareas contribuye al desarrollo del conocimiento profesional docente (Pincheira & Alsina, 2022). Este análisis se ha realizado a partir de la caracterización de los conocimientos para enseñar matemáticas en educación infantil propuesta por Alsina y Delgado (2022) que, como se ha indicado, integra elementos de los principales modelos de conocimiento para enseñar matemáticas (e.g., Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018; Rowland et al., 2005) y tiene en cuenta las características propias de la educación matemática infantil (Alsina, 2020).

Por cuestiones de extensión, el análisis se ha focalizado en el Conocimiento de los Contenidos Matemáticos (C-CM) y en el Conocimiento sobre la Planificación y Gestión de Actividades de enseñanza de las matemáticas (C-PGA) que activan 105 docentes en formación del Grado de Maestro de educación infantil, cuando diseñan tareas de álgebra temprana.

En relación con el C-CM, los contenidos para abordar la enseñanza del álgebra temprana en educación infantil que activan los docentes en formación se centran en las relaciones a partir del reconocimiento de atributos, mientras que el diseño de tareas con contenidos asociados a los cambios es escaso y, todavía más, en el caso de los patrones. Esta tendencia puede interpretarse desde, por lo menos, dos puntos de vista: por un lado, lamentablemente el currículo español vigente de Educación Infantil no considera prácticamente el cambio y omite los patrones (Alsina, 2022b), razón por la cual los docentes en formación pueden tener una percepción sesgada en torno a la relevancia de estos contenidos. Así, a pesar de que en la formación recibida se destaca la importancia de los patrones y el cambio en el desarrollo del pensamiento matemático (Alsina & Pincheira, 2022; Lüken & Sauzet, 2020; Warren & Cooper, 2005) podrían no sentirse interpelados para diseñar tareas asociadas a estos dos contenidos; por otro lado, la influencia de la enseñanza de la matemática que los futuros docentes recibieron cuando ellos mismos eran estudiantes de educación infantil puede haber influido también en el hecho de que se sientan más seguros cuando diseñan tareas cuyo contenido son las clasificaciones y ordenaciones por criterios cualitativos, al tratarse de un tipo de contenido mucho más presente en las prácticas de enseñanza y en los libros de texto (Pincheira et al., 2022).

Por otra parte, respecto del C-PGA, el conocimiento que activan los docentes en formación en el diseño de las tareas responde principalmente a un contexto informal, a partir del uso de material manipulativo. Este dato está alineado con las directrices contemporáneas en torno a las formas de abordar la enseñanza de las matemáticas en infantil, al existir un acuerdo generalizado que se aprenden, primero, a partir de la manipulación, la experimentación y el juego, ya que permiten visualizar las ideas matemáticas de manera concreta (Alsina, 2022a). Adicionalmente, hay que considerar que la manipulación de materiales es, en ella misma, una manera de aprender matemáticas que “promueve la autonomía del aprendiz, ya que limita la participación de los otros, principalmente del adulto, en momentos cruciales del proceso de aprendizaje” (Alsina & Planas, 2008, p. 50).

En síntesis, por un lado, estos primeros resultados han evidenciado que los futuros docentes de matemáticas de educación infantil empiezan a transformar el C-CM, en este caso concreto en torno a los contenidos para enseñar álgebra temprana, a través de procesos de co-construcción, puesto que las tareas se han diseñado colectivamente en el marco de la interacción, la negociación y el diálogo (Alsina et al., 2019). Sin embargo, como señala Alsina (2022b), hace falta seguramente insistir mucho más en el contraste entre lo que menciona el currículo o bien lo que les enseñaron cuando eran pequeños con los datos contemporáneos que viene aportando la investigación en educación matemática infantil para llevar a cabo un proceso de reconstrucción del conocimiento profesional que les aporte seguridad para diseñar, de manera paritaria, tareas alrededor de todos los contenidos. Por otro lado, respecto al C-PGA, hay que seguir insistiendo en cuestiones relevantes como, por ejemplo, que la manipulación es, en ella misma, una manera de aprender que ha de hacer más eficaz el proceso de aprendizaje de las matemáticas, sin hacerlo necesariamente más rápido (Alsina & Planas, 2008). Otra cuestión muy relevante es que, junto con la manipulación de materiales, deberían considerarse otros contextos como las situaciones reales o los recursos literarios, tecnológicos y gráficos, para responder a las necesidades reales de aprendizaje de la diversidad de los niños y las niñas de educación infantil (Alsina, 2022a).

Con el propósito de que la formación inicial no sea una especie de tabla rasa que haga que, cuando los docentes en formación accedan a la profesión, reproduzcan los mismos modelos con los que aprendieron de pequeños (Esteve & Alsina, 2020), será necesario diseñar nuevos estudios que sigan aportando datos en torno al desarrollo y la transformación del conocimiento profesional docente que se focalicen en otros aspectos muy relevantes del conocimiento para enseñar matemáticas en educación infantil como el Conocimiento de los Procesos Matemáticos (C-PM), el Conocimiento sobre las Orientaciones Curriculares (C-OCU), etc.

Agradecimientos

Este estudio fue apoyado por la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo del Gobierno de Chile (ANID) mediante una beca de doctorado en el extranjero, Folio N° 72200447.

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener conflictos de intereses. Los financiadores no tuvieron ningún papel en el diseño del estudio; en la recopilación, análisis o interpretación de datos; en la redacción del manuscrito, o en la decisión de publicar los resultados.

Contribuciones de los autores

Todos los coautores han participado en el proceso de investigación y redacción.

Referencias

- Acosta, Y., Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). El pensamiento algebraico en educación infantil: estrategias didácticas para promover las habilidades para hacer patrones. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 11(2), 1-37. <https://doi.org/10.24197/edmain.2.2022.1-37>
- Alsina, Á. (2014). Procesos matemáticos en Educación Infantil: 50 ideas clave. *Números*, 86, 5-28.
- Alsina, Á. (2015). *Matemáticas intuitivas e informales de 0 a 3 años. Elementos para empezar bien*. Narcea, S.A. de Ediciones.
- Alsina, Á. (2019). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números*, 100, 85-108.
- Alsina, Á. (2020). Revisando la educación matemática infantil: una contribución al Libro Blanco de las Matemáticas. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 9(2), 1-20.
- Alsina, Á. (2022a). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (3-6 años)*. Graó.
- Alsina, Á. (2022b). Los contenidos matemáticos en el currículo de Educación Infantil: contrastando la legislación educativa española con la investigación en educación matemática infantil. *Épsilon – Revista de Educación Matemática*, 111, 67-89.
- Alsina, Á., Batllori, R., Falgàs, M. y Vidal, I. (2019). Marcas de autorregulación para la construcción del perfil docente durante la formación de maestros. *Revista Complutense de Educación*, 30(1), 55-74.
- Alsina, Á. y Delgado, R. (2022). ¿Qué conocimientos necesita el profesorado de Educación Infantil para enseñar matemáticas? *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 5(1), 18-37.
- Alsina, Á. y Mulà, I. (2019). Advancing towards a transformational professional competence model through reflective learning and sustainability: The case of mathematics teacher education. *Sustainability*, 11, 4039. <https://doi.org/10.3390/su11154039>.
- Alsina, Á. y Pincheira, N. (2022). El cambio: un conocimiento esencial del álgebra temprana. *Revista Científica ECOCIENCIA*, 9(6), 49-76. <https://doi.org/10.21855/ecociencia.95.737>

- Alsina, Á. y Planas, N. (2008). *Matemática Inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea S. A.
- Altman, D.G. (1991). *Practical statistics for medical research*. Chapman and Hall.
- Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Baroody, A.J. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. Teachers College Press.
- Blanton, M. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446. <https://doi.org/10.2307/30034944>
- Cai, J. y Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A Global dialogue from multiple perspectives*. Springer.
- Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). NCTM e IAP.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M^a. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20, 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Castro, E. y Castro, E. (Eds.) (2016), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil*. Ediciones Pirámide.
- Charalambous, C. y Pitta-Pantazi, D. (2016). Perspectives on priority mathematics education: Unpacking and understanding a complex relationship linking teacher knowledge, teaching, and learning. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 19-59). Routledge.
- Clements, H.D. y Sarama, J. (2015). *El Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas a Temprana Edad*. Learning Tools LLC.
- Creswell, J. W. (2014). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Sage Publications.
- Esteve, O. y Alsina, Á. (2020). Más allá del PowerPoint: promoviendo el aprendizaje activo en la formación de maestros no presencial. *Papeles de Trabajo sobre Cultura, Educación y Desarrollo Humano*, 16(3), 1-14.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach*. Holland Reidel Publishers.
- Freudenthal, H. (1991). *Revising mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.
- Gasteiger, H. y Benz, C. (2018). Enhancing and analyzing kindergarten teachers' professional knowledge for early mathematics education. *The Journal of Mathematical Behavior*, 51, 109-117.
- Geist, E. (2014). *Children are born mathematicians: supporting mathematical development, birth to age 8*. Pearson.

- Hundeland, P.S., Erfjord, I. y Carlsen, M. (2017). A kindergarten teacher's revealed knowledge in orchestration of mathematical activities. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the CERME 10* (pp. 1853 - 1860). DCU Institute of Education and ERME.
- Kaput, J. J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum Associates/NCTM.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1131-1150. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>
- Knuth, E., Stephens, A., Blanton, M. y Gardiner, A. (2016). Build an early foundation for algebra success. *Phi Delta Kappan*, 97(6), 65-68. <https://doi.org/10.1177/0031721716636877>
- Krippendorff, K. (2013). *Content Analysis. An Introduction to Its Methodology*. Sage Publications.
- Lee, J. (2010). Exploring kindergarten teachers' pedagogical content knowledge of mathematics. *International Journal of Early Childhood*, 42, 27-41. <https://doi.org/10.1007/s13158-010-0003-9>
- Lenz, D. (2022). The role of variables in relational thinking: an interview study with kindergarten and primary school children. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1181-1197. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01419-6>
- Liljedahl, P., Chernoff, E. y Zazkis, R. (2007). Interweaving mathematics and pedagogy in task design: A tale of one task. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 239-249. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9047-7>
- Lüken, M. y Sauzet, O. (2020). Patterning strategies in early childhood: a mixed methods study examining 3- to 5-year-old children's patterning competencies. *Mathematical Thinking and Learning*, 23(1), 28-48. <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1719452>
- McCray, J. y Chen, J.Q. (2012). Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: Construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education*, 26, 291-307. <https://doi.org/10.1080/02568543.2012.685123>
- Mosvold, R., Bjuland, R., Fauskanger, J. y Jakobsen, A. (2011). Similar but different—investigating the use of MKT in a Norwegian kindergarten setting. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1802-1811). CERME.
- Muñoz-Catalán, M^a. C. (2018). Las matemáticas en Educación Infantil. En M^a. C. Muñoz-Catalán y J. Carrillo (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas para maestros de Educación Infantil* (pp. 1-19). Paraninfo.
- Muñoz-Catalán, M^a. C., Joglar, N., Ramírez, M., Escudero, A.M., Aguilar, A. y Ribeiro, M. (2019). El conocimiento especializado del profesor de infantil desde el aula de matemáticas. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.),

- Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 63–84). Ediciones Universidad Salamanca.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Traducción de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Oppermann, E., Anders, Y. y Hachfeld, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education*, 58, 174-184. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.05.004>
- Pepin, B. (2015). *Enhancing mathematics/STEM education: A 'resourceful' approach*. Inaugural lecture, 27 November 2015, Technische Universiteit Eindhoven.
- Pincheira, N., Acosta, Y. y Alsina, Á. (2022). Incorporación del álgebra temprana en Educación Infantil: un análisis desde los libros de texto. *PNA*, 17(1), 1-24. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i1.24522>
- Pincheira, N. y Alsina, Á. (2021). Hacia una caracterización del álgebra temprana a partir del análisis de los currículos contemporáneos de Educación Infantil y Primaria. *Educación Matemática*, 33(1), 153-180. <https://doi.org/10.24844/EM3301.06>
- Pincheira, N. y Alsina, Á. (2022). Mathematical knowledge of pre-service Early Childhood and Primary Education Teachers: an approach based on the design of tasks involving patterns. *Australian Journal of Teacher Education*, 47(8), 50-69. <http://dx.doi.org/10.14221/ajte.2022v47n8.4>
- Rico, L. Sierra, M. y Castro, E. (2000). Didáctica de la matemática. En L. Rico y D. Madrid (Eds), *Las Disciplinas Didácticas entre las Ciencias de la Educación y las Áreas Curriculares*. Síntesis.
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255–281. <http://dx.doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5>
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Stephens, A., Blanton, M., Knuth, E., Isler, I. y Gardiner, A. M. (2015). Just Say Yes to Early Algebra! *Teaching Children Mathematics*, 22(2), 92-101. <https://doi.org/10.5951/teacchilmath.22.2.0092>
- Sullivan, P., Clarke, D. y Clarke, B. (2013). *Teaching with tasks for effective mathematics learning*. Springer Science & Business Media.
- Thanheiser, E. (2015). Developing prospective teachers' conceptions with well-designed tasks: Explaining successes and analyzing conceptual difficulties. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(2), 141-172. <https://doi.org/10.1007/s10857-014-9272-9>

- Twohill, A., Breen, S., Venkat, H. y Roberts, N. (2019). Task design for early algebra. En M. Graven, H. Venkat, A. Essien, y P. Vale (Eds.), *Proceedings of the 43rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 185-186). PME.
- Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Issues in Early Childhood*, 6(2), 150-162. <https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5>