

Burgos, M., López-Martín, M.^a del M. y Albanese, V. (2025). Interpretación de Respuestas de Alumnos en Problemas de Probabilidad por Maestros en Formación. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 39(2), 179-194.

<https://doi.org/10.47553/rifop.v39i2.108921>

Interpretación de Respuestas de Alumnos en Problemas de Probabilidad por Maestros en Formación

Interpretation of students' answers to probability problems by pre-service primary education teachers

María Burgos

Universidad de Granada, <https://orcid.org/0000-0002-4598-7684>

María del Mar López-Martín

Universidad de Almería, <https://orcid.org/0000-0001-8677-9606>

Verónica Albanese

Universidad de Granada, <https://orcid.org/0000-0002-3176-2468>

Resumen

La capacidad de los maestros para analizar las prácticas matemáticas de los alumnos al resolver tareas e interpretar sus conocimientos y dificultades es fundamental para comprender sus necesidades de aprendizaje y planificar la enseñanza de las matemáticas. En este trabajo se muestra cómo un grupo de 133 estudiantes del grado de Educación Primaria de una universidad española examinan las respuestas de alumnos ficticios a una tarea que requiere determinar la composición de una caja para que tenga la misma probabilidad que otra con una proporción muestral dada. Utilizando un enfoque metodológico cualitativo, analizamos cómo los maestros en formación valoran y justifican la adecuación de las respuestas de los alumnos, reconocen en las prácticas rasgos de conocimiento probabilístico, e identifican errores o dificultades. Los resultados revelan dificultades para valorar adecuadamente las soluciones de los alumnos y para reconocer conocimientos probabilísticos a través de los elementos matemáticos implicados en estrategias, especialmente cuando no son las habituales. La mayoría tuvo problemas para describir las estrategias empleadas por los alumnos, interpretar correctamente el uso de fracciones e identificar aspectos del razonamiento proporcional empleado. Estos hallazgos subrayan la necesidad de fortalecer la formación didáctico-matemática de los futuros maestros, proporcionando más oportunidades para que analicen las respuestas de los estudiantes y desarrollen un discurso profesional que les permita interpretar correctamente las estrategias y conocimientos matemáticos evidenciados por los alumnos.

Palabras clave: Probabilidad; Formación de profesores; Enfoque ontosemiótico; Análisis cognitivo.

Abstract

Teachers' ability to analyse students' mathematical practices when solving tasks and to interpret their knowledge and difficulties is essential for understanding their learning needs and planning effective mathematics instruction. This paper shows how a group of 133 Primary Education students from a Spanish university examines fictional pupils' responses to a task that requires determining the composition of a box to have the same probability as another with a given sample ratio. Using a qualitative methodological approach, we analyse how the trainee teachers evaluate and justify the adequacy of the pupils' responses, recognize probabilistic knowledge traits in the practices, and identify errors or difficulties. The results reveal difficulties in adequately evaluating pupils' solutions and recognizing probabilistic knowledge through the mathematical elements involved in strategies, especially when they are not the usual ones. Most had problems describing the strategies used by the pupils, correctly interpreting the use of fractions, and identifying aspects of the proportional reasoning employed. These findings underscore the need to strengthen the didactic-mathematical training of future teachers, providing more opportunities to analyse students' responses and develop a professional discourse that allows them to correctly interpret the strategies and mathematical knowledge evidenced by the pupils.

Keywords: *Probability; Teacher Training; Onto-semiotic Approach; Cognitive Analysis.*

Introducción

Las investigaciones interesadas en el desarrollo profesional subrayan la importancia de que el profesor de matemáticas disponga de un conocimiento especializado del propio contenido, de las transformaciones que se deben aplicar al mismo en los procesos instruccionales y de los factores de tipo psicológico, pedagógico o sociológico, que condicionan dichos procesos (Godino et al., 2017). Este conocimiento especializado debe permitir al profesor percibir las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de verlas de alguien que no es profesor de matemáticas. Esta “mirada profesional” del pensamiento matemático de los estudiantes supone, en particular, describir las estrategias de solución que utilizan los estudiantes, discernir los detalles en sus respuestas e interpretar la comprensión y las equivocaciones de los estudiantes atendiendo a los elementos matemáticos identificados (Bufo et al., 2020; Fernández et al., 2023).

Las investigaciones que analizan cómo docentes en formación o en activo interpretan la comprensión de los estudiantes sobre determinados contenidos y cómo actúan para responder a sus logros o dificultades, revelan que un conocimiento limitado del contenido matemático por parte del profesorado obstaculiza su capacidad para analizar las respuestas de los alumnos, y que, aun así, un adecuado conocimiento del contenido no es suficiente para que los profesores reconozcan la comprensión matemática de sus alumnos (Fernández et al., 2018; Simpson & Haltiwanger, 2017). Los profesores requieren un conocimiento especializado del contenido, su aprendizaje y su enseñanza que les permita resolver las tareas de diferentes formas, identificado los elementos matemáticos involucrados, reconocer las formas de pensar de los estudiantes, concepciones erróneas y dificultades usuales; organizar las interacciones en el aula y gestionar los errores (Scheiner et al., 2019). Determinar en qué medida los docentes en formación o en ejercicio atienden a los elementos matemáticos que utilizan los alumnos en la resolución de tareas para interpretar su pensamiento matemático, requiere centrar la atención en dominios específicos. En nuestro caso, consideramos el del razonamiento probabilístico, en el que los docentes muestran numerosos sesgos y un conocimiento didáctico insuficiente (Batanero & Álvarez-Arroyo, 2024; Franco & Alsina, 2022) que puede limitarles para interpretar las respuestas de los alumnos cuando resuelven problemas de probabilidad (Batanero et al., 2015; Burgos et al., 2022; Burgos et al., 2023).

Así, el objetivo que persigue este trabajo es explorar los conocimientos y competencias de maestros en formación para:

- OE1. Analizar e interpretar las estrategias de solución que utilizan alumnos para resolver a una tarea probabilística.
- OE2. Determinar en base a este análisis la corrección de las soluciones y justificaciones de los alumnos.
- OE3. Interpretar la comprensión y los errores de los estudiantes teniendo en cuenta los elementos matemáticos relevantes en sus respuestas.

La situación matemática propuesta requiere determinar la composición de una urna (con número de casos posibles conocido) para que la probabilidad de éxito sea la misma que en otra donde no se conoce la composición, pero sí la razón entre casos favorables y desfavorables. El interés de esta situación es que permite conectar dos componentes esenciales del razonamiento probabilístico: la identificación de la naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades y la comprensión del espacio muestral (Supply et al., 2020), permitiendo que los maestros en formación reconozcan e interpreten ambas características en las prácticas matemáticas de los estudiantes.

Marco teórico

En esta investigación adoptamos el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor desarrollado dentro del Enfoque Ontosemiótico (Godino et al., 2017 y 2019). En este modelo, la dimensión matemática del conocimiento del profesor se refiere al conocimiento que permite a los docentes resolver las tareas matemáticas propias del nivel educativo en el que enseñará (conocimiento matemático común) y vincular los objetos matemáticos de dicho nivel con objetos matemáticos que se estudiarán en niveles superiores (conocimiento matemático expandido). La dimensión didáctica del modelo CCDM (Godino et al., 2017) propone seis subcategorías del conocimiento especializado o didáctico-matemático del profesor: epistémica (significados del contenido institucional), ecológica (alineación de tareas con el currículo institucional), cognitiva (conocimiento sobre las formas de razonar de los estudiantes, los conflictos y errores que emergen al resolver problemas específicos), afectiva (creencias, afectos y disposiciones hacia las matemáticas manifestadas por los estudiantes), interaccional (identificación y respuesta a los conflictos e interacciones de los estudiantes), y mediacional (elección de los recursos más adecuados para la enseñanza).

En el modelo CCDM, la competencia del profesor se entiende como la capacidad para abordar los problemas didácticos básicos implicados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en particular, para proporcionar respuestas adecuadas a situaciones reales en el aula, como evaluar las respuestas de los estudiantes y tomar decisiones consecuentes (Godino et al., 2017).

En este trabajo de investigación nos centramos en evaluar la competencia de análisis cognitivo de los maestros en formación, que supone la capacidad de los docentes para reconocer las formas de pensar, concepciones erróneas, conflictos y errores que surgen del proceso de resolución de problemas. La competencia de análisis cognitivo implica (Godino et al., 2017):

- Descomponer las resoluciones de los estudiantes identificando la intencionalidad de las prácticas matemáticas elementales. Se entiende por práctica matemática toda actuación o expresión (verbal, gráfica, simbólica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos (Godino et al., 2019).
- Reconocer los objetos matemáticos (lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que intervienen en esas prácticas y su funcionalidad.
- Interpretar las estrategias de solución de los estudiantes en un problema, analizando si los procedimientos y argumentos son correctos y qué conocimientos ponen de manifiesto.

El análisis cognitivo toma como unidad los significados personales de los estudiantes, entendidos como los sistemas de prácticas matemáticas desarrollados por el estudiante al resolver una clase de problema y los objetos que emergen de dichas prácticas. Por tanto, pone en juego conocimientos especializados en las facetas epistémica (conocimiento de las prácticas y objetos

institucionales) y cognitiva (conocimiento de las prácticas y objetos personales). La competencia de análisis cognitivo se relaciona con la “mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes” (Buforn et al., 2020; Fernández et al., 2023) que supone reconocer los elementos relevantes en las estrategias empleadas por los estudiantes al resolver los problemas de matemáticas, pero también descartar los que no lo son. También supone desarrollar un discurso profesional para explicar la comprensión de los alumnos cuando hacen matemáticas, es decir, disponer de un lenguaje específico que permita al profesor expresar con sentido lo que ha identificado como relevante desde el punto de vista matemático.

Se han desarrollado algunas investigaciones destinadas a evaluar los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas de maestros en formación y en ejercicio para la enseñanza de la probabilidad, algunas de las cuales han abordado la dimensión cognitiva de manera específica. En este contexto Mohamed (2012) propuso a futuros maestros de primaria resolver primero y después evaluar y explicar el razonamiento de alumnos ficticios en cuatro problemas de probabilidad. Sus resultados muestran que, aunque los participantes (que trabajaron en pequeños grupos) identifican adecuadamente las respuestas correctas e incorrectas, no siempre logran explicar las causas de error. Además, la solución que proponen en ocasiones no se relaciona con la evaluación de la respuesta del estudiante. En la misma línea, y con el propósito de evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes sobre probabilidad, Batanero et al. (2015) proponen a futuros maestros identificar las respuestas correctas e incorrectas, y explicar las posibles intuiciones o estrategias que han llevado a alumnos (ficticios) a dar una respuesta incorrecta.

Aunque inicialmente los maestros en formación habían mostrado un razonamiento probabilístico limitado, lograron de manera mayoritaria elaborar explicaciones pertinentes a las respuestas erróneas de los alumnos. Vásquez y Alsina (Vásquez & Alsina, 2015a y 2015b) diseñaron y aplicaron un cuestionario para evaluar el conocimiento didáctico-matemático de maestros en ejercicio para la enseñanza de la probabilidad. La evaluación del conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (facetas cognitiva y afectiva) se lograba mediante la identificación de las respuestas correctas y la descripción de las posibles dificultades que lleva a alumnos (ficticios) a ofrecer las respuestas incorrectas. La evaluación del conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (facetas interaccional y mediacional) se planteaba por medio de la reflexión sobre las estrategias que utilizaría el profesor para que los alumnos que han dado una respuesta inadecuada se den cuenta de su error y lo superen. Los resultados mostraron un nivel de desempeño limitado en los diferentes tipos de conocimientos involucrados, especialmente en lo relativo a la noción de suceso seguro, el cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales, y la comprensión de la independencia de sucesos.

Dröse et al. (2022) propusieron a futuros profesores de secundaria de matemáticas el análisis de una resolución real a un problema de probabilidad condicionada junto con un extracto de un diálogo (viñeta) entre estudiantes para investigar sus competencias docentes. Entre los resultados observaron que los futuros docentes percibían errores procedimentales, pero menos las dificultades conceptuales que los causan.

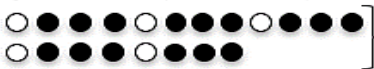
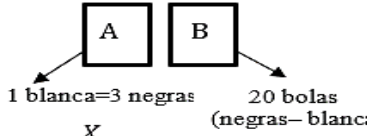
Numerosos estudios indican que muchos de los errores conceptuales y procedimentales en el ámbito de la probabilidad pueden deberse a un razonamiento proporcional insuficiente (Begolli et al., 2021; Van Dooren, 2014). El razonamiento proporcional forma parte del análisis del espacio muestral, la cuantificación proporcional de las probabilidades y la comprensión y uso de las correlaciones (Bryant & Nunes, 2012; Van Dooren, 2014). Por este motivo, recientemente, Burgos y colaboradores han evaluado específicamente los conocimientos y competencias de futuros maestros de Educación Primaria para interpretar las respuestas de estudiantes en tareas de comparación de probabilidades (Burgos et al., 2022) y de juego equitativo Burgos et al., (2023), analizando cómo identifican el razonamiento proporcional, o su ausencia, en las prácticas matemáticas de los escolares. Los resultados evidencian las dificultades de los futuros docentes para justificar por qué consideran correcta la respuesta de un alumno; se basan en una solución experta o previa para decidir si es una buena solución o no, sin analizar o cuestionar los argumentos que permiten asegurar la validez de la respuesta del estudiante.

Método

Se adopta un enfoque metodológico cualitativo y exploratorio (Hart et al., 2009) con el objetivo de comprender la capacidad de maestros en formación (MF en adelante) para analizar e interpretar las respuestas de alumnos de primaria a problemas de razonamiento probabilístico. En esta investigación participaron 133 MF (referidos como MF1, ..., MF133 para garantizar su anonimato) estudiantes de tercer curso del Grado de Educación Primaria de una universidad española, durante el curso 2022/2023, quienes cursaban una asignatura que aborda los bloques de contenidos específicos de Estadística, Azar y Aritmética. En el momento de la intervención, ya habían recibido formación didáctico-matemática previa de los dos primeros bloques. Esta formación abarcó aspectos epistémicos (principales conceptos, propiedades y procedimientos estocásticos), cognitivos (aprendizaje de la probabilidad, análisis de errores y dificultades) e instruccionales (diseño y secuenciación de tareas, materiales y recursos para la enseñanza de la probabilidad).

En este trabajo, analizamos las respuestas a una tarea específica (Figura 1) incluida en la evaluación de la materia dedicada a la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad, cuya nota tenía un impacto directo en la calificación final de la asignatura. Los MF debían analizar las soluciones de tres alumnos ficticios a un problema que combina dos aspectos esenciales del razonamiento probabilístico: la cuantificación proporcional de las probabilidades y la comprensión de la construcción del espacio muestral (Hernández-Solís et al., 2021, Supply et al., 2023).

Figura 1
Formulación de la tarea propuesta

A continuación, aparecen las soluciones de tres alumnos de primaria al siguiente problema: <i>Disponemos de dos cajas, la caja A y la caja B, que contienen ambas bolas blancas y bolas negras. En la caja A por cada bola blanca hay tres bolas negras. En la caja B hay 20 bolas (entre negras y blancas). ¿Cuántas bolas hay de cada color en la caja B si es igual de probable sacar una bola blanca que en la caja A?</i>																				
Respuesta de Luis Caja A- por cada blanca hay 3 negras Caja B-20 bolas (entre ambas)  Nos dice que por cada bola blanca hay 3 bolas negras en la caja A y en la caja B hay 20 bolas entre blancas y negras. Para que sea igual de probable sacar una bola blanca en ambas cajas significa que ambas cajas tienen las mismas bolas, es decir, 20 bolas. Por tanto, mediante el esquema observamos que hay en la caja A 5 bolas blancas y 15 negras y por tanto en la caja B hay otras 5 bolas blancas y otras 15 negras, ya que para que haya la misma probabilidad de sacar un color tiene que haber las mismas bolas de ese color.	Respuesta de Carla Caja A – $P(\text{blanca}) = 1/3 = 0,3$ Caja B – $P(\text{blanca}) = X/20$ X: casos posibles  $0,3 = \frac{X}{20}$ $0,3 \times 20 = X$ $X = 6$ <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>20</td><td></td></tr> <tr><td>×</td><td>0,3</td></tr> <tr><td>60</td><td></td></tr> <tr><td>00</td><td></td></tr> <tr><td>06,0</td><td></td></tr> </table> <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>20</td><td>bolas</td></tr> <tr><td>– 6</td><td>casos posibles (blancas)</td></tr> <tr><td>14</td><td>bolas negras</td></tr> </table> $P(B) = 6/20 = 0,3$ La probabilidad de sacar bola blanca en la caja A es de 0,3; y en la caja B es exactamente la misma. Por tanto, hacemos la probabilidad de sacar bola blanca; que es los casos favorables “X” (desconocemos) entre los casos posibles que son 20 (porque hay ese número de bolas). Al despejar la ecuación nos damos cuenta de que hay 6 casos favorables de sacar blanca. Por tanto, al restar 6 a 20 bolas; nos da 14 negras. <table style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr><td>6 bolas blancas</td><td rowspan="2">} Caja B</td></tr> <tr><td>14 bolas negras</td></tr> </table>	20		×	0,3	60		00		06,0		20	bolas	– 6	casos posibles (blancas)	14	bolas negras	6 bolas blancas	} Caja B	14 bolas negras
20																				
×	0,3																			
60																				
00																				
06,0																				
20	bolas																			
– 6	casos posibles (blancas)																			
14	bolas negras																			
6 bolas blancas	} Caja B																			
14 bolas negras																				
Respuesta de Alba <table style="margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: 50px; text-align: center;">1/3</td> <td>A. Es decir de cada 4 bolas, 1 blanca y 3 negras</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px; width: 50px; text-align: center;">20 bolas</td> <td>B. Igual de probable de sacar una bola blanca que en la caja A</td> </tr> </table> Supongamos que en la caja A hay únicamente 4 bolas. Si en la caja B hay 20, eso quiere decir que hay 5 veces más bolas que en la A. Entonces multiplicamos $1/3 \times 5$ y nos da como resultado $5/15$, es decir, por cada 5 bolas blancas hay 15 negras. Si en la caja B había 20 bolas, entonces únicamente hay 5 blancas.	1/3	A. Es decir de cada 4 bolas, 1 blanca y 3 negras	20 bolas	B. Igual de probable de sacar una bola blanca que en la caja A																
1/3	A. Es decir de cada 4 bolas, 1 blanca y 3 negras																			
20 bolas	B. Igual de probable de sacar una bola blanca que en la caja A																			
a) ¿Crees que son correctas las soluciones y las justificaciones dadas por los alumnos? ¿Qué errores han cometido? Justifica tu respuesta analizando individualmente la respuesta de cada alumno. b) ¿En qué soluciones se identifica cierto conocimiento de la probabilidad? Justifica tu respuesta indicando el o los alumnos que lo poseen.																				

Para llevar a cabo la investigación, las investigadoras realizaron, en primer lugar y de manera independiente, el análisis a priori de la tarea propuesta. Este fue contrastado y consensuado después, contando con la participación de una experta colaboradora externa. Como resultado de este análisis, se observa que Luis determina correctamente la composición de la caja B siguiendo una estrategia de reparto equitativo. Sin embargo, su justificación no es del todo adecuada pues asume que debe haber el mismo número de bolas en ambas cajas para que la probabilidad sea la misma. Si bien no le impide obtener la composición adecuada, evidencia un desconocimiento de la naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades que puede limitar su comprensión sobre la equiprobabilidad.

Alba obtiene la composición correcta de la caja B, suponiendo que en la caja A hay sólo 4 bolas. Esta particularización es posible desde el punto de vista de la equivalencia (mismas probabilidades) de las cajas, luego podría tener conciencia de la naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades (se obtiene la misma probabilidad respetando la razón entre casos favorables y desfavorables), aunque no lo dice explícitamente. En la representación expresa la razón de bolas blancas a negras en A y establece una relación multiplicativa entre esta y la composición de la caja B ("5 veces más bolas que en la caja A"). Cuando Alba expresa " $\frac{1}{5} \times 5$ " y nos da como resultado $5/15$, es decir, por cada 5 bolas blancas hay 15 negras", podría estar cometiendo un error en la multiplicación de la fracción por un número (multiplicar numerador y denominador por dicho número). Sin embargo, es posible que su intención fuera usar " $\times 5$ " para expresar la relación 5 veces más; así obtiene la fracción $5/15$ equivalente a la que determina la composición en A, $\frac{1}{3}$, "multiplicando por 5". Así se pueden identificar como conocimientos implícitos en la respuesta de Alba: ideas de espacio muestral, casos favorables, casos posibles, naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades. La respuesta de Carla pone de manifiesto la confusión entre los términos "posible" y "favorable" (mal uso en el lenguaje, no desconocimiento del concepto): antes de plantear la ecuación proporcional llama "posibles" a los casos "favorables", cuando se refiere a "x" como la cantidad desconocida de bolas blancas en B, pero, luego sí identifica " $x=6$ " como el número de casos favorables, siendo 20 los posibles en B. Por tanto, parece conocer la noción de espacio muestral. Aunque plantea la ecuación proporcional derivada de la igualdad de probabilidades (lo que supone entender el carácter proporcional del cálculo de probabilidades), en el caso de la probabilidad de A, en el término de la izquierda, usa la razón 1 a 3 (favorables a desfavorables) en lugar de 1 a 4 (favorables a posibles).

En el término de la derecha, sí aplica correctamente la regla de Laplace, por lo que su conocimiento al respecto podría ser parcial (lo aplica bien en un momento y mal en otro). Así, se pueden identificar como conocimientos implícitos en la respuesta de Carla: ideas de espacio muestral, naturaleza proporcional del cálculo y la comparación de probabilidades.

A continuación, cada una de las investigadoras realizó de forma individual el análisis de contenido (Cohen et al., 2018) de parte de las respuestas de los MF, identificando categorías de respuestas en cada consigna. Así, identificaron fragmentos que incluían referencias a las prácticas operativas (la estrategia de solución) y las prácticas discursivas (la argumentación o justificación de la solución), localizando las alusiones a elementos matemáticos y cómo los utilizaban para interpretar la comprensión o el error reflejado en las respuestas de los alumnos. Después las investigadoras compartieron y discutieron los resultados, consensuando la valoración y una primera posible categorización. Este método se repitió hasta completar el análisis de la mitad de los informes de los participantes. Como resultado de un proceso cíclico e inductivo, propio de la investigación cualitativa, se obtuvieron las categorías descritas en la sección de resultados, tanto para el análisis de las soluciones y justificación como para la identificación de conocimientos a través de las respuestas de los estudiantes.

Resultados

En esta sección describimos cómo valoran, es decir, como reconocen los MF el grado de corrección de las respuestas de los alumnos en base a la interpretación de sus soluciones y justificaciones, y de qué manera atienden a los elementos matemáticos para interpretar sus errores y su comprensión.

Valoración del grado de corrección de las respuestas de los alumnos

Valoración de la respuesta de Luis. A continuación, describimos las categorías derivadas de las valoraciones a la solución de Luis por los MF.

- *Igual probabilidad no supone igual número de bolas.* En esta categoría los MF señalan que, aunque Luis obtiene la composición “proporcionalmente”, su argumento es incorrecto, pues una probabilidad de éxito igual en ambas cajas no implica, obligatoriamente, una igualdad en el número de bolas de cada color. Por ejemplo:

Su justificación [de Luis] no es correcta, ya que no comprende la relación de proporcionalidad. Piensa que debe haber el mismo número de bolas para tener la misma probabilidad, pero en realidad, basta con que sean proporcionales. Su respuesta es posible, pero debe comprender dicha relación (MF24).

- *Igual probabilidad supone igual número de bolas.* En esta categoría los MF consideran la respuesta de Luis como correcta, admitiendo que si la probabilidad de éxito es la misma necesariamente debe haber el mismo número de bolas de cada color en ambas cajas. Por ejemplo:

En el caso de este alumno [Luis], sí es correcta su respuesta dada sobre el problema dado, llegando a la conclusión de que si en la caja A hay 5 bolas blancas y 15 bolas negras, para tener la misma probabilidad en ambas cajas deber tener el mismo número de cada color de bolas (MF18).

- *Estrategia adecuada.* Se considera adecuada la estrategia icónica seguida por Luis sin reflexionar sobre la justificación que añade. Por ejemplo:

En el caso de Luis vemos como su respuesta es correcta, ya que ha llevado a cabo un buen razonamiento en cuanto a la distribución de las bolas y al uso de términos tales como la equiprobabilidad de los sucesos. Ha hecho uso de un esquema, el cual le ayuda a comprender la distribución de los colores en ambas cajas (MF51).

- *No concluyente.* Se recogen las respuestas de los MF que no se alinean con ninguna de las categorías previas y que no proporcionan una interpretación clara de su valoración de la solución de Luis. Así, se considera no concluyente la respuesta de MF122: “El resultado obtenido por Luis es correcto, ya que como bien ha justificado por cada 5 bolas blancas obtendremos 15 negras”.

En la Tabla 1 se recoge la distribución de frecuencias de respuestas de los MF según estas categorías. Aunque no es un porcentaje muy elevado, si es significativo que el 12 % de los MF se basen en el argumento “si la probabilidad de éxito es la misma necesariamente debe haber el mismo número de bolas de cada color en ambas cajas” para valorar como adecuada la respuesta de Luis (también incluso para considerar como no del todo apropiadas las de Alba o Carla por no asumirlo).

Tabla 1

Distribución de frecuencias (porcentajes) en la valoración a la respuesta de Luis por los MF (n=133)

Categorías	Frecuencia (%)
Igual probabilidad no implica igual cantidad de bolas	79 (59.40)
Igual probabilidad implica igual cantidad de bolas	16 (12.03)
Estrategia adecuada	16 (12.03)
No concluyente	19 (14.29)
Sin respuesta	3 (3.26)

Solo el 17 % de los participantes consideró globalmente incorrecta la respuesta proporcionada por Luis. En contraste, una parte significativa de los MF valoró la respuesta de Luis de manera positiva: el 35 % la consideró correcta en su totalidad, es decir, tanto la estrategia como la justificación, y el 44 % de los MF concluyó que, aunque la justificación de Luis no era adecuada, la composición de la caja propuesta era correcta. En escasas ocasiones interpretaron por qué era correcta su estrategia, haciendo más referencia en todo caso a la representación (“uso de dibujos”) que al reparto proporcional.

Valoración de la respuesta de Alba. Como resultado del análisis de las producciones de los MF se encontraron las siguientes categorías de valoración de la respuesta de Alba.

- *Estrategia adecuada apoyada en la proporcionalidad.* Se considera que la estrategia seguida por Alba es adecuada y se menciona explícitamente la proporcionalidad o la equivalencia de fracciones. Por ejemplo:

Tanto la respuesta como la justificación [de Alba] es correcta ya que ha identificado la proporcionalidad entre ambas cajas. Identifica tanto los casos favorables como los posibles y entiende la proporción que debe haber entre ambas cajas para que se cumpla la equiprobabilidad (MF72).
- *Uso erróneo de las fracciones.* En esta categoría los MF indican que, aunque la solución de Alba es adecuada, su justificación incluye un error al representar las fracciones o al expresar la operación con estas. Por ejemplo:

Alba, sin embargo, a la hora de justificar [...] de realizar la operación de $\frac{1}{5} \times 5$ la ha realizado mal ya que el 5 simplemente multiplica al numerador ya que el denominador sería 1. Debería de haber multiplicado las blancas y negras, cada una por 5 que es por lo que multiplica (MF112).
- *Ausencia de razonamiento probabilístico.* Se considera que Alba no emplea un razonamiento probabilístico adecuado. En particular, no tiene en cuenta la equiprobabilidad, no calcula o no compara probabilidades o considera erróneamente el número de casos posibles. Por ejemplo, el argumento que da [Alba] no es adecuado. Establece la proporcionalidad en ambos casos, teniendo en cuenta que en la bolsa B hay también por cada blanca tres negras, pero no hay la misma probabilidad que en la bolsa A de sacar blanca. Aplicando Laplace $5/20 \neq \frac{1}{5}$ (MF23).
- *Uso incorrecto de la razón 1 a 3 en lugar de 1 a 4* (no como probabilidades). Por ejemplo, MF73 indica “su respuesta [de Alba] y razonamiento son incorrectos ya que la razón en la caja A con 4 bolas no sería $\frac{1}{5}$ sino $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{4}$ para blancas y negras respectivamente”.
- *Asumir incorrectamente que en A hay 4 bolas.* En esta categoría los MF plantean que Alba comete el error de considerar que en la caja A hay 4 bolas, sin respaldar esta suposición. Por ejemplo, MF91 indica que “el fallo [de Alba] viene cuando admite que en la caja A hay únicamente 4 bolas, dato del cual no hay información”.
- *No concluyente.* Se recogen las respuestas de los MF que no se alinean con ninguna de las categorías previas y que no proporcionan una interpretación clara de su valoración de la respuesta de Alba. Estos MF habían considerado globalmente correcta su solución, pero a lo sumo indicaban el “uso de la lógica”, la coincidencia con la composición esperada o la evidencia de conocimientos probabilísticos sin precisar cuáles (por ejemplo, “tanto la respuesta como la justificación [de Alba] son correctas. Se nota que ha adquirido correctamente los conocimientos de probabilidad”, MF6).

Como muestra la Tabla 2, hubo un alto porcentaje de valoraciones no concluyentes de la respuesta de Alba. De hecho, los MF tuvieron grandes dificultades para valorar la respuesta de Alba, en muchos casos porque no interpretaron adecuadamente el papel de las fracciones en su estrategia considerando, por ejemplo, que para Alba $\frac{1}{5}$ es la probabilidad de sacar bola blanca en A. Algunos expresan abiertamente no entender su estrategia (“no sé de dónde ha sacado las 4 bolas y no sé por qué hay 5 bolas más que en la A”, MF25). En otros casos, no reflexionan sobre el posible

significado de "...hay 5 veces más bolas que en la A. Entonces multiplicamos $\frac{1}{3} \times 5$ y nos da como resultado $5/15$."

Del 46 % de los MF que consideraron correcta la solución de Alba, los que aportaron alguna valoración concluyente se basaron en el uso de la proporcionalidad para determinar la composición de la caja B. Estos MF entienden que las fracciones empleadas por Alba representan probabilidades. Aquellos MF que valoraron como globalmente incorrecta la respuesta de Alba (24 % de los MF) se centraron fundamentalmente en el uso erróneo de la relación 1 a 3 en lugar de 1 a 4 y la ausencia del cálculo de probabilidades. Finalmente, los que consideraron que la justificación no era adecuada pese a ser correcta la composición obtenida en la caja, se basaron principalmente en la expresión incorrecta de las fracciones o las operaciones con estas.

Tabla 2

Distribución de frecuencias (porcentajes) en la valoración a la respuesta de Alba por los MF (n=133)

Categorías	Frecuencia (%)
Estrategia adecuada apoyada en la proporcionalidad	23 (17.29)
Uso erróneo de las fracciones	17 (12.78)
Ausencia de razonamiento probabilístico	19 (14.29)
Uso erróneo de la relación 1:3 por 1:4	20 (15.04)
Asumir que en A hay 4 bolas	12 (9.02)
No concluyente	38 (28.57)
Sin respuesta	4 (3.01)

Valoración de la respuesta de Carla. En lo que sigue resumimos las categorías derivadas de las valoraciones de los MF a la solución de Carla.

- *La composición de la caja B no respeta la razón o probabilidad de la caja A.* Se considera que la respuesta de Carla es incorrecta ya que la composición que obtiene de la caja B no cumple que la probabilidad de sacar bola blanca sea la misma que en A ("[...]no es correcto ya que no hay la misma probabilidad de sacar una bola blanca en ambas cajas, esto es debido a que en la caja B pone que hay 14 bolas negras y 6 blancas", MF99) o no respeta la razón de bolas blancas a negras en A:

No ha tenido en cuenta a la hora de comprobar el resultado obtenido de que por cada bola blanca hay 3 negras. Si tenemos en cuenta ese esquema en total habría 18 bolas negras y 6 bolas blancas. Por lo tanto, habría un total de 24 bolas (blancas y negras) (MF83).

- *No identificación o confusión entre los casos favorables y posibles.* Se considera que Carla tiene dificultades para determinar o diferenciar los casos posibles y favorables en los espacios muestrales de ambas cajas. Por ejemplo, MF93 precisa que: "Esta alumna [Carla] no es capaz de identificar casos favorables y casos posibles. Por ello, dice que la probabilidad de sacar blanca es $\frac{1}{3}$, cuando realmente sería $\frac{1}{4}$ ".
- *Uso erróneo de la relación 1:3 por 1:4 (no como probabilidades).* Se considera que el error en la respuesta de Carla procede de pensar en la relación de casos favorables a desfavorables (1 a 3) en lugar de casos favorables a posibles (1 a 4). MF32 indica en este sentido "Su error [Carla] viene de interpretar mal la fracción. Ha puesto que $\frac{1}{3}$ representa a la caja A porque hay 1 por cada 3, pero no ha visto que son 4."
- *Error en el cálculo de la probabilidad de sacar bola blanca.* Se considera que el planteamiento de Carla es adecuado y que lo que le ha impedido llegar a la solución correcta es el cálculo erróneo de la probabilidad de sacar bola blanca en A:

[Carla] se ha equivocado en averiguar las bolas blancas de la caja B, ya que ha puesto que la probabilidad de sacar blanca en la caja A es de $\frac{1}{3}$ y sería $\frac{1}{4}$, tenemos cuatro bolas y una de ellas es blanca (MF78).

- *Uso de la regla de Laplace para plantear una ecuación proporcional.* En esta categoría los MF reconocen como correcta (más sofisticada) la estrategia de Carla basada en el planteamiento, a partir de la regla de Laplace, y resolución de una ecuación. Por ejemplo, MF55 aprecia que: "La respuesta [de Carla] es correcta y justificada, pues además de entender el concepto, realiza operaciones y despeja la "x" para conocer los casos posibles de obtener blanca en la caja B."
- *No concluyente.* Los MF no basan su juicio en elementos matemáticos (por ejemplo, MF27 indica que "probablemente haya algún error al aplicar sus conocimientos al ejercicio") o cuando los mencionan no se ajustan a las prácticas matemáticas de Carla (por ejemplo, MF41 apunta como error "[Carla] da por hecho que en las dos cajas hay 20 bolas").

En la Tabla 3 se incluye la distribución de frecuencias de respuestas de los MF según estas categorías.

Tabla 3

Distribución de frecuencias (porcentajes) en la valoración a la respuesta de Carla por los MF (n=133)

Categorías	Frecuencia (%)
La composición de la caja B no respeta razón o probabilidad de la caja A	22 (16.54)
No identificación o confusión entre casos favorables y posibles	24 (18.05)
Uso erróneo de la relación 1:3 por 1:4	26 (19.55)
Error en el cálculo de la probabilidad de sacar bola blanca	20 (15.04)
Aplica regla de Laplace para plantear ecuación proporcional	11 (33.33)
No concluyente	20 (15.04)
Sin respuesta	10 (7.52)

Para el 60 % de los participantes, la solución de Carla es incorrecta. Sin embargo, cuando explican su valoración sólo identifican parcialmente los errores, destacando el uso incorrecto de la razón 1 a 3 en vez de 1 a 4 o las dificultades para distinguir casos favorables y posibles a la hora de determinar las probabilidades. En otros casos sólo indican que el resultado no es el esperado bien en términos de distribución o de probabilidad, expresando sus dudas sobre cómo Carla obtiene este resultado: "No comprendo muy bien el sistema operacional de Carla, pero creo que es erróneo debido a que el resultado final que muestra no da que haya la misma distribución de bolas blancas y negras en ambas cajas" (MF46).

El carácter "más algebraico" de la solución de Carla podría haber influido en la valoración de su solución por parte de los MF, quienes tienden a considerar el uso de expresiones algebraicas como garantía de rigurosidad en un proceso de resolución ("Carla decidió tomar un enfoque mucho más matemático que visual, queriendo calcular la probabilidad con una ecuación desde una perspectiva clásica con la regla de Laplace", MF11). Así un 14 % de los MF consideró correcta la solución propuesta por Carla basándose (cuando su valoración fue concluyente) en el planteamiento y resolución de una ecuación proporcional derivada de la aplicación de la regla de Laplace. Además, un 11 % de los MF indicó que, pese a que la composición obtenida para la caja A era incorrecta (bien por error operacional al calcular la probabilidad de obtener bola blanca, o bien por haber confundido la fracción $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{4}$) la intención detrás de la estrategia era correcta. Por ejemplo, MF107 aprecia:

No es correcta su respuesta [la de Carla]. La idea en general de Carla es acertada, sin embargo, se equivoca al establecer las equivalencias, escribe la probabilidad de sacar blanca es $\frac{1}{3}$ cuando realmente es $\frac{1}{4}$. Este fallo ocasiona que todo esté mal.

Observamos un aumento del número de MF que no dieron una evaluación del grado de corrección de la respuesta de Carla.

Identificación de conocimientos

En la segunda parte, los MF debían indicar justificadamente qué respuestas de los alumnos reflejaban algún conocimiento probabilístico. Atendiendo al análisis a priori (sección de Método) más allá de la familiaridad con los términos “probable” y “probabilidad” no es posible identificar conocimiento de la probabilidad en la respuesta de Luis, pues no reconoce la naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades.

En el caso de Alba se pueden identificar como conocimientos implícitos: nociones de espacio muestral, casos favorables, casos posibles, naturaleza proporcional del cálculo de probabilidades.

De igual forma, Carla tendría conocimientos sobre espacio muestral, así como del carácter proporcional del cálculo y la comparación de probabilidades. A continuación, describimos y ejemplificamos las categorías derivadas del análisis de las producciones de los MF.

- *Dominio de conceptos y términos probabilísticos.* Esta categoría incluye las respuestas de los MF que consideran como muestra de conocimiento probabilístico el empleo de términos específicos como aleatorio, espacio muestral, casos favorables, casos posibles, probabilidad o equiprobabilidad. Por ejemplo:

La explicación realizada por Luis se encuentra dotada de lenguaje de probabilidad (“igual de probable”, “la misma probabilidad” ...). Paralelamente, Alba y Carla han demostrado también un buen manejo del lenguaje de la probabilidad, siendo en el caso de Carla su explicación un tanto más clara y comprensible que la aportada por Alba, pues incluso demuestra conocer elementos más técnicos como los “casos favorables” y “casos posibles” (MF2).

- *Misma probabilidad implica mismo número de bolas.* Consideran incorrectamente como muestra de conocimiento probabilístico en la respuesta de Luis, reconocer que, si la probabilidad es la misma, la composición de ambas cajas debe ser idéntica. Por ejemplo, MF34 indica:

En la respuesta dada por Luis es donde se identifica el conocimiento adecuado de la probabilidad. Cuando especifica que para que haya la misma probabilidad de sacar una bola de un color debe haber las mismas bolas de ese color está haciendo referencia a sucesos equiprobables, es decir sucesos que tengan la misma probabilidad de suceder.

- *Misma probabilidad solo requiere misma razón.* Los MF señalan como conocimiento probabilístico en las respuestas de Alba y Carla, tener en cuenta que la probabilidad puede ser la misma sin que haya la misma cantidad de casos favorables y desfavorables, siempre que se mantenga su razón. Por ejemplo, MF13 indica que: “Alba sabe que no tiene que haber el mismo número de bolas de cada tipo en la caja, sabe que teniendo la misma razón tienen la misma probabilidad independientemente del número de bolas que contenga la caja.”.
- *Dominio de la regla de Laplace.* En esta categoría los MF destacan el uso adecuado de la regla de Laplace para el cálculo de probabilidades como un indicativo de conocimiento probabilístico. Por ejemplo, MF53 indica: “[Carla] utiliza la regla de Laplace para calcular la probabilidad “a priori” (sin ser realizado el experimento) de “sacar bola blanca” en la caja A ($\frac{1}{3}$). Si en la caja B tenemos 20 bolas ($x/20$) y lo relaciona.”.
- *Conexión de probabilidad con proporcionalidad.* Los MF identifican como conocimiento probabilístico reconocer elementos propios de la proporcionalidad tales como la equivalencia de fracciones, o la relación multiplicativa entre cantidades de casos favorables o posibles entre ambas cajas. Por ejemplo:

Alba posee un conocimiento adecuado de la probabilidad, pues valora la opción de que las cajas tengan diferente número de bolas y establece una relación de

proporcionalidad entre ambas, observando que en la caja B hay 5 veces más bolas que en la A (MF28).

La Tabla 4 muestra con qué frecuencia identificaron los MF estos tipos de conocimiento y en qué alumno.

Tabla 4

Distribución de las frecuencias (porcentaje) de respuesta según categorización asociada a la identificación de conocimiento probabilístico (n=133)

Categorías	Luis	Alba	Carla	Total
Dominio de conceptos y términos probabilísticos	5 (3.76)	5 (3.76)	9 (6.77)	19
Misma probabilidad implica mismo número de bolas	13 (9.77)	1 (.75)	0 (.00)	14
Misma probabilidad solo requiere misma razón	5 (3.76)	20 (15.04)	9 (6.77)	34
Dominio de la Regla de Laplace	5 (3.76)	5 (3.76)	26 (19.55)	36
Conexión de probabilidad con proporcionalidad	2 (1.50)	21 (15.79)	2 (1.50)	25
No concluyente	25 (18.80)	18 (13.53)	11 (8.27)	54
Total	55 (41.35)	70 (52.63)	57 (42.86)	

El que los MF indiquen que se puede observar en su solución conocimientos con relación a los términos probabilísticos, de la regla de Laplace o que Luis entiende que se mantiene la probabilidad cuando lo hace la razón, muestra las dificultades que han tenido los participantes para valorar la respuesta de este alumno. Además, el 11 % de los MF consideran que el único alumno que muestra un conocimiento adecuado de la probabilidad es Luis, basándose fundamentalmente en que sólo él asume la igualdad de la composición de ambas cajas:

Luis está en lo cierto pues si en "si en ambas cajas es igual de probable obtener blanca, debemos asumir que en la caja A existe el mismo n.º de bolas, por tanto, si por cada bola blanca existen 3 negras, habrá 5 blancas y 15 negras.

Esto deja a Luis como única persona con un conocimiento adecuado de la probabilidad (MF37).

Casi la mitad de las respuestas en las que los MF reconocieron conocimientos probabilísticos en la respuesta de Luis, se consideraron no concluyentes, en tanto precisaban como muestra de conocimiento la interpretación correcta del enunciado, o lo que identificaban no eran conocimientos probabilísticos (dibujos, conteo de bolas, etc.).

Más de la mitad de los MF consideraron muestras de conocimiento probabilístico a través de la respuesta de Alba. Además, aproximadamente un 26 % de los participantes señalaron que esta es la única alumna con dicha característica. Aunque algunas descripciones de los MF también fueron no concluyentes (fundamentalmente por asumir la corrección de sus cálculos como única muestra de conocimiento probabilístico) cuando fueron más precisas indicaban como conocimientos la distinción entre misma probabilidad y misma composición de las cajas, o bien que a través de su estrategia se observa que Alba entiende el tratamiento proporcional de las probabilidades. En el primer caso, aunque de manera informal, se refieren a la "equivalencia de urnas" (fijando la atención en el espacio muestral) en el segundo a comprender el carácter proporcional del cálculo de probabilidades (aunque Alba no menciona la probabilidad en su discurso).

[Alba] obtiene la proporción en que aumenta el número total de bolas. Posteriormente utiliza esta proporción para obtener cuántas bolas tiene la caja B de cada color. Para ello multiplica las bolas blancas de la caja A por tal proporción y las bolas negras también. Con

ello demuestra conocer la relación de proporcionalidad que existe en el cálculo de la probabilidad para la resolución de este problema (MF93).

Finalmente, algo más del 40 % de los MF indican que Carla muestra conocimiento probabilístico en su respuesta (considerándola la única con este conocimiento en el 21 % de los casos) centrando su justificación de forma mayoritaria en la aplicación efectiva de la regla de Laplace.

Discusión y conclusiones

El objetivo de este trabajo ha sido informar de los conocimientos y competencias de un grupo de MF al interpretar las respuestas de alumnos a una tarea que busca determinar la composición de una urna de tal forma que la probabilidad de éxito sea la misma que en otra donde se conoce la razón de casos favorables a casos desfavorables. Se trata de una tarea novedosa con relación a las planteadas habitualmente en investigaciones previas (Hernández-Solís et al., 2021; Supply et al., 2020), en la que juega un papel fundamental el razonamiento proporcional, así como una de las capacidades del razonamiento probabilístico “crear probabilidades”, que más dificultades causa a los estudiantes según Supply et al. (2020).

En línea con investigaciones previas (Batanero et al., 2015; Dröse et al., 2022; Vásquez & Alsina, 2015a y 2015b) los resultados muestran un conocimiento didáctico-matemático insuficiente que dificulta a los MF la tarea de identificar por medio de las prácticas operativas y discursivas de los alumnos, cuál es su pensamiento matemático y justificar por qué consideran correcta o no la respuesta de un alumno, cuándo muestran cierto conocimiento o qué error han cometido. Esto los lleva a decidir la adecuación de una solución, según si se ajusta o no al resultado esperado sin analizar la validez de las estrategias y justificaciones que emplean los alumnos ante una determinada situación-problema (Burgos et al., 2022, Burgos et al., 2023).

También se aprecian deficiencias en el conocimiento matemático, especialmente en lo que al carácter proporcional de las probabilidades se refiere. Así, algunos MF consideran que, si la probabilidad es la misma en dos cajas, necesariamente deben tener el mismo número de bolas de cada color. Esto los lleva además a asumir que Alba y Carla cometen el mismo error, sin reflexionar sobre sus prácticas o por qué la composición que obtienen puede ser o no válida.

Observamos también que los MF usan de manera confusa el término “equiprobabilidad”; incluso para valorar las respuestas de los tres alumnos, un mismo MF puede asociarlo con misma probabilidad, entendida como mismo número de bolas, mientras que en el caso de Carla “tener en cuenta la equiprobabilidad” se asocia a plantear la igualdad de las probabilidades.

Los MF no sólo deben ser capaces de reconocer errores, sino también comprensión a través de las prácticas de los alumnos. En este sentido, cuando los MF han identificado conocimientos probabilísticos se han referido fundamentalmente al ámbito de la proporcionalidad en el caso de Alba (destacando su habilidad para conectar fracciones con probabilidad y comprender que la equiprobabilidad no requiere igualdad numérica de bolas) o a la aplicación de la regla de Laplace en el de Carla.

Investigaciones previas respaldan que un razonamiento proporcional deficiente motiva muchos de los errores al resolver problemas de probabilidad (Begolli et al, 2021; Van Dooren, 2014). Nuestros resultados muestran, además, que un conocimiento deficiente del carácter proporcional del cálculo y comparación de probabilidades limita a los profesores para identificar obstáculos de aprendizaje (imponer la igualdad de composición para tener la misma probabilidad en el caso de Luis) o para entender el fundamento de las estrategias seguidas cuando resuelven un problema que implica el razonamiento proporcional en el contexto probabilístico (por ejemplo, no contemplar la posibilidad de usar las razones de casos favorables a desfavorables, en el caso de Alba o Carla).

Nuestros resultados subrayan, en línea con Fernández et al. (2023), la necesidad de que los MF dispongan de los conocimientos de matemáticas y didáctica de las matemáticas específicos para desarrollar las destrezas de identificar e interpretar correctamente la comprensión o las dificultades de los estudiantes. Señalan además la importancia de ofrecer a los MF más oportunidades durante su formación para analizar la actividad matemática de los alumnos y de

reforzar el papel del discurso matemático como medio para reconocer los conocimientos matemáticos de los alumnos más allá de lo que evidencian los procedimientos (comunes o no) en la solución de un problema. Lograr la riqueza y las perspectivas relativistas necesarias para ofrecer algo más que una única "respuesta correcta" (Bufo et al., 2020) puede pasar por fortalecer la flexibilidad de los futuros docentes para resolver problemas diluyendo las fronteras de aplicación entre los contextos (aritmético, probabilístico, geométrico...) en el análisis de la actividad matemática y de contar con pautas que los guíen en esta tarea.

Las características de los participantes (quienes se encontraban al comienzo de su formación y podrían tener una experiencia limitada en el área de probabilidad) podrían influir en la generalización de los resultados a otros contextos o grupos de docentes con una formación más avanzada. Esta limitación sugiere la necesidad de realizar estudios adicionales que incluyan muestras más diversas (tanto en tareas como en participantes), posibilitando un estudio más profundo de los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas de los docentes en formación en cuanto al razonamiento probabilístico en diversos contextos. En particular, sería beneficioso articular el análisis epistémico y cognitivo, e investigar la competencia para interpretar las respuestas de los estudiantes en maestros en ejercicio, con el objetivo de identificar otros aspectos, además de la conexión entre el razonamiento proporcional y el probabilístico, que deberían integrarse en los programas de formación de maestros.

Consideraciones éticas de la investigación y uso de inteligencia artificial

En todo momento se ha garantizado la confidencialidad de los datos y no se han difundido nombres ni información que permitiera identificar al alumnado.

No se ha utilizado inteligencia artificial (IA) en ninguna fase de elaboración de este trabajo.

Agradecimientos y financiación

Investigación realizada como parte del proyecto de investigación PID2022-139748NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por FEDER, UE, con apoyo de los Grupo de Investigación FQM-126 y HUM-886 (Junta de Andalucía)

Conflicto de intereses

Los autores declaran no tener ningún conflicto de intereses. Los financiadores no tuvieron ningún papel en el diseño del estudio; en la recopilación, análisis o interpretación de datos; en la redacción del manuscrito, o en la decisión de publicar los resultados.

Contribuciones de los autores

Conceptualización, M. B.; Metodología, M. B., M. M. L.-M. y V. A.; Análisis formal, M. B., M. M. L.-M.; Investigación, M. B.; Análisis de datos, M. B., M. M. L.-M. y V. A.; Redacción del borrador original, M. B.; Redacción, revisión y edición, M. B., M. M. L.-M.; Supervisión, M. M. L.-M. y V. A.

Referencias

- Batanero, C. & Álvarez-Arroyo, R. (2024). Teaching and learning of probability. *ZDM - Mathematics Education*, 56(1), 5–17. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01511-5>
- Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M. & Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: Un estudio exploratorio. *Práxis Educativa*, 10(1), 11–34. <https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.10i1.0001>

- Begolli, K. N., Dai, T., McGinn, K. M. & Booth, J. L. (2021). Could probability be out of proportion? Self-explanation and example-based practice help students with lower proportional reasoning skills learn probability. *Instructional Science*, 49, 441–473. <https://doi.org/10.1007/s11251-021-09550-9>
- Bryant, P. & Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review*. The Nuffield Foundation.
- Bufor, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A. & Brown, L. (2020). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 1–9. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333>
- Burgos, M., López-Martín, M. M., Aguayo, C. G. & Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuros profesores de educación primaria. *Uniciencia*, 36, 1-24. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.38>
- Burgos, M., López-Martín, M. M., Albanese, V. & Aguayo-Arriagada, C. G. (2023). Analysis of primary school students' answers to fair game tasks: An experience with preservice teachers. *BEIO, Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 39(3), 48–69. https://www.seio.es/wp-content/uploads/2023/12/2023_3_Historia.pdf
- Dröse, J., Griese, B. & Wessel, L. (2022). Prospective teachers' diagnostic judgments on students' understanding of conditional probabilities. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (pp. 3080–3088). Free University of Bozen-Bolzano and ERME.
- Fernández, C., Ivars, P. & Llinares, S. (2023). El desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes durante los períodos de práctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 98 (37.2), 127-146. <https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99296>
- Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. & Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development, and contexts. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 39–61. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.229>
- Franco, J. & Alsina, Á. (2022). El conocimiento del profesorado de Educación Primaria para enseñar estadística y probabilidad: una revisión sistemática. *Aula Abierta*, 51(1), 7-16. <https://doi.org/10.17811/rifie.51>
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach. *For the learning of mathematics*, 39(1), 38-43. <https://www.jstor.org/stable/26742011>
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, 31(57), 90-113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M. & Álvarez-Arroyo, R. (2021). Construcción de espacios muestrales asociados a distintos tipos de sucesos: un estudio exploratorio con estudiantes de Educación Primaria. *Educación Matemática*, 33(1), 181-207. <https://doi.org/10.24844/em3301.07>
- Ivars, P., Fernández, C., Llinares, S. & Choy, B. H. (2018). Enhancing noticing: Using a hypothetical learning trajectory to improve pre-service primary teachers' professional discourse. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(11), em1599. <https://doi.org/10.29333/ejmste/93421>
- Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*. [Tesis Doctoral, Universidad de Granada] <https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/TESISMOHAMED.pdf>

- Simpson, A. & Haltiwanger, L. (2017). This is the first time I've done this: Exploring secondary prospective mathematics teachers' noticing of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(4), 335-355. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9352-0>
- Supply, A. S., Van Dooren, W. & Onghena, P. (2020). Can we count on early numerical abilities for early probabilistic reasoning abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 24(1), 19-37. <https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1805551>
- Supply, A. S., Vanluydt, E., Van Dooren, W. & Onghena, P. (2023). Out of proportion or out of context? Comparing 8- to 9-year-olds' proportional reasoning abilities across fair-sharing, mixtures, and probability contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 113, 371-388. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10212-5>
- Van Dooren, W. (2014). Probabilistic thinking: analyses from a psychological perspective. En E. J. Chernoff & B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives* (pp. 123-126). Springer.
- Vásquez, C. & Alsina, Á. (2015a). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *BOLEMA*, 29 (52), 681-703. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13>
- Vásquez, C. & Alsina, A. (2015b). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 7, 27-48. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i7.104>