LLULL, *vol. 32, 2009, 233-255*

LES CONIQUES EN OCCIDENT MUSULMAN ENTRE LE XI^{e} ET LE XIV^{e} SIÈCLE

ABDELMALEK BOUZARI
Ecole Normale Supérieure de Kouba, Alger

RÉSUMÉ

Le but de cet article est de donner, grâce aux sources exhumées ces dernières décennies, un aperçu de la contribution des mathématiciens de l'Occident Musulman à la théorie des sections coniques et à leurs applications entre le XI^{e} et le XIV^{e} siècle.

ABSTRACT

The aim of this paper is to give, thanks to the last decades exhumed sources, an outline survey of the contribution of Moslem Occident medieval mathematicians to the conic sections theory and to their applications between XI^{e} and XIV^{e} century.

Mots clés: Coniques, Occident Musulman, Mathématiques, Moyen Age, Apollonius, al-Mu'taman.

Keywords: Conics, Muslim West, Mathematics, Middle Ages, Apollonius, al-Mu'taman.

1. Introduction

Le plus ancien biobibliographe andalou qui évoque les *Coniques* d'Apollonius est Ṣā^{c}id al-Andalusī (m. 463/1071), dans son *Kitāb Ṭabaqāt al-Umam* [Livre des catégories des nations], qui écrit ceci, en évoquant les scientifiques grecs : «*Et parmi leurs savants mathématiciens, il y a Apollonius le charpentier, l'auteur du livre des* Coniques *qui a été composé sur la science des propriétés des lignes courbes qui ne sont ni droites ni arquées*». C'est presque dans les mêmes termes qu'il décrit le con-

Recibido el 3 de enero de 2009
Aceptado el 14 de enero de 2009
ISSN 0210-8615

tenu d'un ouvrage d'Ibn as-Samḥ (m. 426/1035) en parlant de : «*son grand livre sur la géométrie dans lequel il s'est étendu sur ses parties relatives à la ligne droite, à la "ligne" arquée et à la "ligne" courbe*». On verra plus loin qu'il s'agit en effet d'un livre contenant des éléments sur les sections coniques. La troisième et dernière information de Ṣāᶜid ayant un lien avec ces courbes est son évocation du «*Livre de l'heptagone*» qu'il attribue à Archimède [ṢĀᶜID, 1985, pp. 85, 87, 170].

Aucun des autres bibliographes connus de l'Occident Musulman ne mentionne les *Coniques* et il faudra attendre le XIVe siècle pour qu'Ibn Khaldūn les évoque en des termes vagues, qui montrent qu'il n'était pas au fait du contenu du livre d'Apollonius. Il dit à ce sujet: «*Quant aux «sections» coniques, elles sont aussi une des branches de la géométrie. C'est une science qui étudie ce qui advient dans les solides coniques comme figures et sections et qui démontre ce qui résulte comme phénomènes, à l'aide de preuves géométriques*». Dans un autre passage, il donne une information sur les équations du troisième degré [IBN KHALDŪN, III, 2005, pp. 81, 86] mais sans précision sur la nature des outils géométriques utilisés pour leur résolution[1].

Le même Ibn Khaldūn, en évoquant al-Mu'taman (m.1085), un des rois de la petite dynastie des Banū Hūd qui régnait à Saragosse au XIe siècle, semble lui attribuer un ouvrage sur l'optique [IBN KHALDŪN, 1983, VII, pp. 351-352]. Ce qui laisse à penser que les sections coniques ont pu intervenir comme outil dans un domaine appliqué.

Jusqu'aux années 80 du siècle dernier, les sources que nous venons d'évoquer étaient les seules qui renseignaient sur une éventuelle présence des coniques en Andalus. Puis de nouvelles recherches ont exhumé des écrits scientifiques qui ont éclairé d'un jour nouveau cette tradition géométrique, en révélant des textes importants et en explicitant une partie de leurs contenus respectifs. Dans ce qui suit nous allons, grâce à ces recherches, donner un aperçu des contributions des mathématiciens de l'Occident Musuluman à la théorie des sections coniques.

2. La contribution d'Ibn as-Samḥ

Son nom complet est Abūl-Qāsim Aṣbagh ibn Muḥammad Ibn as-Samḥ al-Mahrī. Peu de choses nous sont parvenues sur sa vie et sur sa formation. Il serait né à Cordoue et, à une époque indéterminée, il s'est installé à Grenade où il a peut-être fréquenté la cour de l'émir Ḥabūs Ibn Maksān (ca. 409-429/1019-1038). Il mourut dans cette ville en 426/1035, à l'âge de 56 ans.

Il eut, parmi ses professeurs, le célèbre mathématicien et astronome Maslama al-Majrīṭī (m. 397/1007). On sait aussi qu'il s'était spécialisé en théorie des nombres, en géométrie, en astronomie théorique et appliquée [ṢĀᶜID, 1985, pp. 85, 167-172]. Il s'est également intéressé à la médecine. Ses publications en mathématique ont concerné la géométrie euclidienne, la science du calcul appliquée aux problèmes de transaction, la théorie des nombres et la géométrie des coniques[2]. Ce dernier aspect de son travail devait se trouver dans le quatrième ouvrage cité par Ṣāᶜid. C'est du moins ce qu'autorisent à penser des fragments qui nous sont parvenus dans une traduction hébraïque, réalisée en 1312 par Qalonymos ibn Qalonymos, et qui ont été découverts récemment [LEVY, 1996, pp. 885-895].

Le recueil est intitulé *Ma'amar ba-iṣṭewanot we-hameḥuddadim* [Le traité sur les cylindres et les cônes]. Il est composé de deux parties. La première semble être une introduction dans laquelle l'auteur a rassemblé des définitions et des résultats sans démonstrations. Nous y trouvons d'abord la définition de la sphère et de ses différents éléments avec l'annonce de l'étude, dans un chapitre non encore retrouvé, de ses sections planes, de son aire et de son volume. Puis sont présentées les définitions du cylindre et de ses éléments, en distinguant deux espèces : les cylindres droits, à base circulaire ou elliptique, et le cylindre oblique subdivisé de la même manière. On y trouve enfin les deux définitions du cône, celle d'Euclide et celle d'Apollonius.

La seconde partie de ce texte est composée de 21 propositions qui sont toutes consacrées à l'étude du cylindre et de ses sections planes. L'auteur y démontre, en particulier, que l'ellipse obtenue en coupant la section d'un cylindre par un plan non parallèle aux bases peut être identifiée à la «*figure circulaire allongée*» obtenue par la rotation du sommet d'un triangle dont la base est fixe et dont la somme des deux autres côtés est constante; ce qui correspond à la définition bifocale de l'ellipse.

3. Le projet inachevé d'Ibn Sayyid

La seconde contribution andalouse dans le domaine des sections coniques est celle de ᶜAbd ar-Rahmān Ibn Sayyid (Vᵉ/XIᵉ)[3]. Comme pour son prédécesseur, les biobibliographes ont retenu peu de choses sur sa vie, sa formation et sa production. Ibn al Abbār nous informe qu'en 1063, il était encore étudiant à Jativa et qu'il y suivait alors des cours sur la science des héritages. Au cours de cette même décennie, il est remarqué par Ṣāᶜid al Andalusī qui en parle en le présentant comme un jeune plein de promesse qui avait déjà une formation solide en science [ṢĀᶜID, 1985, pp. 138]. Ibn al-Abbār explicite ce jugement en précisant qu'Ibn Sayyid «*était un savant éminent en théorie du nombre et en "science du" calcul*», et il ajoute que «*aucun de ses contemporains ne l'égalait en géométrie*» [IBN AL-ABBĀR, 1886, II, p. 550].

Les sources scientifiques, tout en étant plus explicites, confirment les appréciations de Ṣāᶜid et d'Ibn al-Abbār. Un premier témoignage se trouve dans le *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul] d'Ibn Munᶜim (m. 626/1228), un scientifique andalou de Dénia qui a vécu et enseigné à Marrakech. Ce dernier évoque une contribution d'Ibn Sayyid à un chapitre de la théorie des nombres, d'origine grecque, celui des *nombres figurés* [DJEBBAR, 1985, p. 4]. Notre mathématicien est également mentionné en marge d'un manuscrit contenant une partie de *l'Istikmāl* d'al-Mu'taman [Ms. Copenhague, Or. 82, f. 26v·] et dans le texte, d'un autre manuscrit, d'un commentateur des *Eléments* d'Euclide [Ms. Hyderabad, Osmaniye 992, f. 46r].

Mais la source la plus importante, parce qu'elle est de nature mathématique et que son contenu concerne directement notre sujet, est une lettre d'Ibn Bājja (m. 532/1138), adressée à un de ses amis de Grenade [ALLAOUI, 1983]. Le philosophe présente, d'une manière très succincte, le contenu des recherches d'Ibn Sayyid, en précisant qu'il avait suivi ses cours en mathématique et qu'il avait étudié le contenu de ses travaux.

Les travaux d'Ibn Sayyid ont concerné la théorie des sections coniques et certaines de ses applications, avec des prolongements à des sujets nouveaux. On peut répartir ces travaux en trois thèmes principaux.

Le premier concerne les *Coniques* d'Apollonius, c'est-à-dire les définitions des courbes étudiées, le nombre et l'agencement des propositions dans chaque Livre et même la structure globale du traité, le but étant d'en donner une version simplifiée mais répondant aux besoins de la recherche. C'est en tout cas ce que laisse entendre Ibn Bājja lorsqu'il précise : «*Dès lors, un grand nombre de propositions aux démonstrations longues sont supprimées, l'attention se portant sur la découverte d'autres choses dont l'intérêt est plus grand et les utilisations plus nombreuses*».

Le second thème, tout à fait original au vu de ce qui est connu des traditions grecque et arabe d'Orient, concerne l'étude de nouvelles courbes planes qu'on nommerait aujourd'hui des «courbes de degré supérieur à deux» et qu'il obtient selon une démarche itérative. D'une manière plus précise, Ibn Sayyid considère deux sections coniques quelconques S_1 et S_2 se coupant dans un plan (P). Il construit les deux cônes $C(O_1, S_1)$, et $C(O_2, S_2)$, de sommets, respectivement, O_1 et O_2 extérieurs à (P) et de bases S_1 et S_2. Il démontre que l'intersection de $C(O_1, S_1)$ et $C(O_2, S_2)$ est nécessairement une courbe gauche. Puis il démontre que la projection de cette courbe sur un plan, et selon une direction déterminée par l'analyse, sera une courbe plane autre que les sections coniques classiques et «*dont la puissance (…) sera alors égale à la puissance réunies des deux sections*». Puis il réitère la procédure en construisant un premier cône de base la courbe plane obtenue et un second de base une section conique quelconque. A la fin de l'opération, il démontre qu'il obtient une courbe plane différente de la première dans le sens où sa «*puissance*» sera égale à la «*puissance*» réunie des deux courbes qui sont les bases du second couple de cônes.

Le troisième et dernier thème, évoqué dans la lettre d'Ibn Bājja, concerne les applications des résultats précédents. Ibn Sayyid se propose de généraliser deux célèbres problèmes hérités de la tradition grecque, c'est-à-dire la détermination de deux moyennes proportionnelles entre deux grandeurs données et la trisection de l'angle. Il aurait ainsi, grâce à ses nouveaux outils, déterminé un nombre quelconque de grandeurs proportionnelles entre deux grandeurs données et réalisé la division d'un angle en n parties ($n \geq 3$). Cette contribution est évoquée en ces termes par Ibn Bājja : «*"Ibn Sayyid" a déterminé n'importe quel nombre de segments entre deux segments, de sorte qu'ils se succèdent tous selon un même rapport (...). Il a également divisé l'angle selon un rapport numérique quelconque*».

Ibn Bājja avait promis, dans sa lettre, de reprendre le travail de son professeur, d'en améliorer le contenu et d'y ajouter ses propres résultats. Mais aucun écrit de ce type n'est évoqué par les bibliographes andalous ou maghrébins postérieurs. Quant au livre qui a pu contenir les travaux d'Ibn Sayyid, il ne semble pas avoir circulé. Comme sa réalisation devait être, probablement, contemporaine ou légèrement postérieure à celle du *Kitāb al-istikmāl* d'al-Mu'taman (que nous allons évoquer plus longuement), il pourrait renfermer de précieuses informations sur le projet de ce dernier à propos des aspects théoriques et appliquées des coniques. Cette remarque est suggérée par le premier thème du propre projet d'Ibn Sayyid qui visait à «*réformer*» l'enseignement des coniques [DJEBBAR, 1990; 1993].

4. Les coniques dans l'ouvrage d'al-Mu'taman et chez ses lecteurs postérieurs

Le troisième mathématicien andalou connu qui s'est intéressé à la théorie des sections coniques n'est autre qu'al-Mu'taman. Il est contemporain d'Ibn Sayyid et a succédé à Ibn as-Samḥ. Les écrits scientifiques et les témoignages indirects qui nous sont parvenus confirment que son époque a été, en Andalus, celle de la consolidation d'une tradition mathématique, qui avait connu un premier développement au Xe siècle, et celle de la production d'œuvres originales. D'une manière générale, la seconde moitié du XIe siècle a été une période faste pour tous les domaines scientifiques pratiqués à cette époque et un début d'essor de la philosophie. En tant qu'observateur de ces communautés scientifiques, Ṣāᶜid al-Andalusī est même capable de recenser les valeurs sûres et de repérer des profils prometteurs. En effet, voici ce qu'il écrit à leur sujet : «*A notre époque, un groupe de jeunes se distinguent par la recherche de la science. Ils ont des intelligences solides et* *des ambitions élevées. Ils ont déjà acquis dans les "différents" domaines «de la science» une partie importante. Parmi "ceux" d'entre eux qui habitent Tolède et ses environs, il y a (...) Ibn an-Naqqāsh, plus connu sous le nom de fils d'az-Zarqiyāl (...) et Ibn Khalaf al-istijī (...). Parmi "ceux" de Saragosse, il y a le ḥājib Abū ᶜĀmir "al-Mu'taman" (...) et Abū Jaᶜfar Ibn Jawshan. Et, parmi ceux de Valence, il y a Abū Zayd ᶜAbd ar-Raḥmān Ibn Sayyid»* [ṢĀᶜID, 1985, pp. 179-180].

Jusqu'au début des années 80 du siècle dernier, on ne savait rien du rôle d'al-Mu'taman dans les activités scientifiques, en dehors des éléments consignés par Sā'id dans ses *Ṭabaqāt* et, beaucoup plus tard, par Ibn Khaldūn, dans son *Kitāb al-ᶜibar* [Livre des sentences]. Dans ce qui suit, nous allons présenter les éléments essentiels de la vie de ce roi mathématicien, tels qu'ils ont été rapportés par les historiens andalous, rappeler le contenu du seul ouvrage qui nous est parvenu, en partant des travaux qui lui ont été consacrés au cours des deux dernières décennies, et exposer sa contribution à la théorie des sections coniques à partir de l'étude réalisée dans le cadre de notre thèse [BOUZARI, 2008].

4.1. La vie et l'œuvre d'al-Mu'taman

Abū ᶜĀmir Yūsuf Ibn Aḥmad Ibn Sulaymān Ibn Muḥāmmad Ibn Hūd al-Judhāmī as-Saraqusṭī, plus connu par son titre honorifique d'al-Mu'taman [Le dépositaire de la confiance «de Dieu»] était destiné à régner sur la province de Saragosse, qualifiée de *ath-Thaghr al-aᶜlā* [Marche supérieure], et qui constituait l'un des nombreux petits *Etats des Taïfa* qui avaient fleuri après la chute du califat de Cordoue [DUNLOP, II, pp. 560-562]; [ᶜINĀN, 1960, pp. 65-66, 216, 219-220, 272-285]. Il fût aussi mathématicien et philosophe et il est considéré aujourd'hui, après l'exhumation d'une partie de sa contribution, comme un des savants les plus représentatifs de la tradition scientifique de l'Andalus du XIe siècle.

Les sources biobibliographiques et historiques accessibles ne nous rapportent que peu d'informations sur sa vie, et celles qui sont fournies concernent essentiellement son profil de dauphin puis de roi de Saragosse. On sait ainsi qu'il était le troisième prétendant de la dynastie des Banū Hūd. Il régna sur sa province de 473/1081 jusqu'à sa mort en l'an 478/1085. Il avait alors succédé à son père Aḥmad al-Muqtadir (437-473/1046-1081) qui a eu un très long règne. Ce dernier a lui-même acquis la réputation d'un savant, doublé d'un mécène, qui s'était passionné pour les mathématiques et la philosophie. Il n'est donc pas étonnant qu'il soit devenu, plus tard, une sorte de référence, comme on peut le lire chez al-Maqqarī (m. 1041/1631) qui rapporte un échange entre un Andalou et un Maghrébin, le premier disant au second, pour le convaincre de la prééminence de sa patrie en science : «*Avez-vous, dans la science des étoiles, en philosophie et en géométrie, un roi* *comme al-Muqtadir Ibn Hūd, le maître de Saragosse ? C'était une référence dans "tout" cela»* [AL-MAQQARI, 1968, III, p. 193].

Cet intérêt pour les sciences et la philosophie a permis à Saragosse de devenir, en quelques décennies, un des foyers scientifiques les plus importants d'al-Andalus. Parmi les représentants du dynamisme de la ville dans ce domaine, Ṣāᶜid évoque longuement, mais avec précision, l'astronome ᶜAbdallah ibn Aḥmad as-Saraqusṭī (m. 448/1056), qualifié par lui «*d'éminent en science du nombre et en géométrie*». Il ajoute à son sujet qu'il a enseigné ces matières à Saragosse et qu'il a formé des étudiants. L'un d'eux est ᶜAlī Ibn Najda [ṢĀᶜID, 1985, p. 175] et il est tout a fait possible qu'al-Mu'taman ait été également son élève ou bien ait suivi certains de ses cours, en particulier en géométrie. On peut également évoquer des spécialistes d'autres domaines, comme Menakhīm Ibn al-Fawwāl et Ibn Gabirol (m. 450/1059), qui étaient versés dans les différentes branches de la philosophie et, en particulier, la Logique, al-Kirmānī (m. 458/1065), bon connaisseur en calcul et en géométrie, qui a eu l'opportunité d'étudier, un certain temps, en Orient avant de s'installer à Saragosse jusqu'à la fin de sa vie [BALTY-GUESDON, 1992, III, pp. 642, 643, 665]. Parmi les hommes de sciences qui ont sûrement fréquenté al-Mu'taman, on peut citer Ibn al-Ḥaddād (m. ca 461/1068), auteur d'écrits philosophiques et qui a vécu, un certain temps, à la cour royale des Banū Hūd [IBN SAᶜĪD, 1978, pp. 143-145.] et Ḥasdāy ibn Yūsuf qui écrit sur la géométrie, la musique et la philosophie tout en exerçant la charge de ministre au service d'al-Muqtadir, le père d'al-Mu'taman [BALTY-GUESDON, 1992, III, p. 669]. A ces hommes de science originaire de la ville, il faudrait ajouter tous ceux qui s'y sont réfugiés pendant la *Fitna* [guerre civile] de Cordoue, comme Muḥammad an-Najjād (m. 429/1038), qui y a enseigné le calcul et la science des héritages, ou Ibn al-Kattānī (m. ca 420/1030), spécialisé en Logique [BALTY-GUESDON, 1992, III, pp. 642, 636].

Al-Mu'taman ne pouvait que profiter de ce contexte très favorable aux activités intellectuelles qu'offrait la capitale de son petit royaume. De plus, et indépendamment de ses aptitudes personnelles, son statut de prince lui a permis d'avoir une formation de base solide dans les différentes sciences enseignées à cette époque. Il pouvait, en effet, disposer, à tout instant, des richesses de la bibliothèque de son père et pouvait acquérir, grâce à la fortune familiale, n'importe quelle publication scientifique accessible sur les marchés des livres d'Al-Andalus et même d'Orient.

Comme on l'a déjà vu à travers le témoignage de Ṣāᶜid, les aptitudes d'al-Mu'taman et ses orientations se sont révélées alors qu'il était adolescent. On sait ainsi que, «*tout en étant mathématicien, il s'est spécialisé dans la Logique et s'est intéressé à la physique et à la métaphysique*» [ṢĀᶜID, 1985, p. 181].

Nous avons peu d'informations sur ses éventuels écrits dans ces différents domaines. Ibn Khaldūn est le seul à lui attribuer plusieurs publications. Il dit explicitement : «*Il s'occupait de sciences mathématiques et il y a produit des ouvrages, comme* l'Istikmāl *et* l'Optique» [IBN KHALDŪN, 1983, VII, pp. 351-352]. En dehors d'al-Maqqarī (qui ne fait que reprendre, mot pour mot, la phrase d'Ibn Khaldūn) [AL-MAQQARĪ, 1968, I, p. 441], les autres sources connues n'évoquent que le premier titre.

Le second ouvrage, s'il a existé, ne nous est pas parvenu. Mais, comme al-Mu'taman était considéré, déjà dans son jeune âge, comme quelqu'un de féru en sciences physiques et comme nous savons désormais, grâce à certaines parties de *l'Istikmāl,* qu'il avait dans sa bibliothèque le fameux *Kitāb al Manāzir* d'Ibn al Haytham et qu'il connaissait son contenu [HOGENDIJK, 1988, pp. 51-66], il paraît tout à fait plausible qu'il ait consacré un ouvrage indépendant à l'optique ou que ses étudiants ou ses collègues aient extrait, d'un de ses ouvrages, le chapitre de l'optique qu'il renfermait. Cela est fortement suggéré par ce que l'on peut lire dans l'introduction du *Kitāb al-Ikmāl* d'Ibn Sartāq (XIII^{e} -XIV^{e} s.). Il y est écrit qu'al-Mu'taman avait prévu de traiter, dans un chapitre indépendant, «*La science de l'optique, des lumières et des rayons lumineux selon les objets sur lesquels ils tombent*» [DJEBBAR, 1997, p. 189].

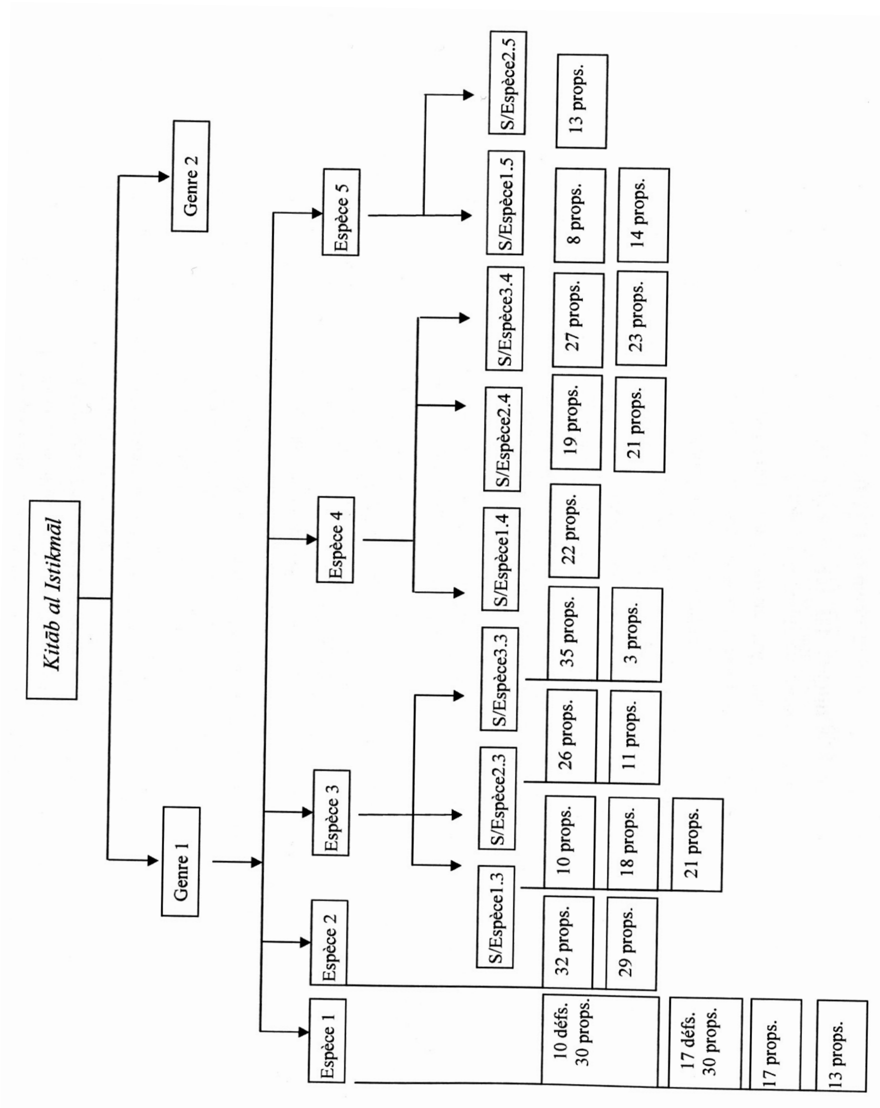
4.2. Le Kitāb al-Istikmāl

Al-Mu'taman avait imaginé son contenu en deux parties matérialisées, chacune, par un volume indépendant. Cette division devait correspondre aux deux «*genres*», théorique et pratique, des sciences mathématiques. La matière du premier volume nous est désormais connue dans le détail et nous disposons de la table des matières du second; ce qui nous permet d'en décrire le contenu.

La première partie, intitulée *al-Jins al-awwal min al-^{c}ulūm al-riyāḍiyya* [Premier genre des sciences mathématiques], est divisé en espèces, chaque espèce en sous espèces, chaque sous espèce en sections et chaque section comporte en moyenne vingt propositions et parfois des définitions, des axiomes ou des notions communes [HOGENDIJK, 1991, pp. 44-46; 2004, pp. 19-34].

Voici le contenu du premier genre :

1. *Sur la connaissance des propriétés des nombres «considérés» séparément et en relation mutuelle*;
2. *Sur les propriétés des lignes, des angles et des surfaces sans relations mutuelles;*
4. *Sur les propriétés des lignes, des angles et des surfaces selon leurs relations mutuelles;*
4. *Sur les propriétés des solides et des sections qui y sont engendrées sans relations mutuelles;*
5. *Sur les relations mutuelles entre les solides et leurs surfaces.*


Kitāb al Istikmāl
Genre 1
Genre 2
Espèce 1
Espèce 2
Espèce 3
Espèce 4
Espèce 5
S/Espèce1.3
S/Espèce2.3
S/Espèce3.3
S/Espèce1.4
S/Espèce2.4
S/Espèce3.4
S/Espèce1.5
S/Espèce2.5
10 défs. 30 props.
17 défs. 30 props.
17 props.
13 props.
32 props.
29 props.
10 props.
18 props.
21 props.
26 props.
11 props.
35 props.
3 props.
22 props.
19 props.
21 props.
27 props.
23 props.
8 props.
14 props.
13 props.

STRUCTURE DU PREMIER VOLUME

Espèce 1	Arithmétiques	90 propositions
Espèce 2	Géométrie plane	61 propositions
Espèce 3	Géométrie plane	124 propositions
Espèce 4	Géométrie stéréométrique	134 propositions
Espèce 5	Géométrie stéréométrique	35 propositions

Le second genre est intitulé «*La géométrie matérielle*». On ne sait pas si sa rédaction avait été commencée, si des chapitres ont été achevés et s'ils ont circulé en même temps que le premier volume de *l'Istikmāl*. Les écrits bibliographiques et mathématiques de l'Occident musulman qui nous sont parvenus sont silencieux sur ce point. La seule source qui évoque explicitement cette partie du projet d'al-Mu'taman est orientale. Il s'agit du *Kitāb al-Ikmāl ar-riyāḍi* [Livre de l'achèvement mathématique] d'Ibn Sartāq (VIII^{e}/XIV^{e} s.)[4].

Une première remarque concerne l'agencement de la matière traitée dans *l'Istikmāl*. Il semble refléter une conception pythagoricienne de la science, telle qu'elle est affirmée par Ikhwān aṣ-Ṣafā' (IVe/Xe s.) dans leurs *Epîtres* [Ikhwān aṣ-Ṣafā', non daté]. C'est en effet un ouvrage essentiellement géométrique mais qui commence par un chapitre, appelé «*première espèce*», consacré exclusivement à la théorie des nombres et plus précisément au contenu (arithmétisé) d'une partie des Livres II et V et d'une grande partie (abrégée) des Livres VII, VIII et IX des *Eléments* d'Euclide [VITRAC, 1994, pp. 247-466]. La dernière partie du chapitre reprend le contenu de la *Risāla fī l-a^{c}dād al-mutaḥābba* [Epître sur les nombres amiables] de Thābit Ibn Qurra [DJEBBAR, 22, 1999, pp. 589-653]. Les quatre autres espèces traitent, dans un certain nombre de sections, elles-mêmes subdivisées en sous sections, de la géométrie euclidienne, de la géométrie des coniques, de la géométrie de la sphère et de la géométrie archimédienne.

La seconde remarque concerne le rôle qu'al-Mu'taman voulait peut-être assigner au premier volume de son ouvrage. Au vu de son contenu, il donne l'impression d'avoir été conçu comme un «*Livre intermédiaire*» au sens des *Mutawassiṭā* de l'Orient musulman. En fait, avec le *Kitāb al-Istikmāl*, on est en présence d'un concentré de «*Mutawassiṭāt*» qui, tout en se limitant aux outils strictement mathématiques, vise à fournir au futur chercheur les outils et les méthodes théoriques qui lui permettront de résoudre des problèmes posés par d'autres disciplines, comme l'astronomie, la physique, la mécanique et la musique.

En tout cas, il semble avoir été perçu, par un certain nombre d'auteurs, comme un ouvrage qui devait combler une lacune. Dans son «*Ṭibb an-nufūs* [la médecine des âmes], Ibn cAqnīn (m. 622/1226) conseille d'étudier le *Kitāb al-Istikmāl* en même temps que les autres Livres des «*Intermédiaires*» [IBN cAQNĪN, 1968, p. 87]. Ibn al-Qifṭī le qualifie de «*belle somme qui a besoin d'une édition*» [IBN AL-QIFṬĪ, non daté, p. 210]. Un siècle plus tard, Ibn Akfānī (m. 749/1348), bibliographe et mathématicien, affirme, après avoir énuméré un certain nombre d'écrits de géométrie : «*Et, jusqu'à maintenant, je n'ai pas vu un livre englobant ces dix parties «de la géométrie». Mais si l'ouvrage* al-Istikmāl *d'al-Mu'taman Ibn Hūd, que Dieu lui soit miséricordieux, avait été achevé, il aurait été satisfaisant et suffisant*» [IBN AL-AKFĀNĪ, 1900, p. 74]. A la même époque ou un peu plus tard, un auteur oriental anonyme reprend, mot pour mot, la première phrase d'Ibn al-Akfānī en ajoutant «*Al-Mu'taman (…) visait cela dans son Livre appelé* al-Istikmāl *et il était capable de faire cela. Mais le temps ne lui a pas été donné pour le compléter. Alors il y a mis un point final*» [HOGENDIJK, 1991, p. 214].

*4.3. L'*Istikmāl *dans la tradition mathématique d'al-Andalus et du Maghreb après le XI^e^ siècle*

Nous ne savons pas comment a circulé le *Kitāb al-istikmāl* du vivant de son auteur ni au cours des dernières décennies de l'existence du royaume de Saragosse. Après 1110, l'année de la prise de Saragosse par les Almoravides, il est possible que le contenu de la bibliothèque de la famille royale des Banū Hūd ait été dispersé et qu'une partie des ouvrages se soit retrouvée chez des familles chrétiennes de Castille [SAMSO, 2005, p. 302][5]. Mais aucun élément ne nous permet de dire que cela a été une opportunité pour des traductions latines ou hébraïques des ouvrages d'al-Mu'taman et leur diffusion en Europe, comme ce fut le cas pour certains écrits scientifiques andalous des XIe-XIIe siècles[6].

Pour ce qui est de cette diffusion vers le Sud et l'Est, il nous est parvenu quelques informations dispersées dans des écrits de la tradition arabe du Maghreb et d'Orient et dans la tradition hébraïque. La plus ancienne référence à l'*Istikmāl*, qui nous soit parvenue, est celle attribuée à Maïmonide (m. 1204). Elle nous est rapportée par Ibn al-Qifṭī qui affirme que ce savant «*a révisé le livre de l'*Istikmāl *d'Ibn Hūd dans la science mathématique (…). Il l'a étudié, corrigé et édité…*» [IBN AL-QIFṬĪ, non daté, p. 54]. Malheureusement aucun écrit contenant cette contribution n'a été exhumé. De son côté, Ibn cAqnīn (m. 1226), qui a suivi certains cours de Maïmonide au Caire, donne des informations suffisamment détaillées et concordantes sur le contenu de l'*Istikmāl* pour nous permettre de dire que la tradition mathématique hébraïque des XIIe-XIIIe siècles avait intégré tout ou partie de cet ouvrage dans son corpus mathématique [HOGENDIJK, 1986, pp.

43-45]; [IBN ^{c}AQNĪN, 1968, p. 87]. Cela suppose d'ailleurs une bonne connaissance de la tradition mathématique grecque, en particulier celle de la géométrie euclidienne et celle de la géométrie des coniques. C'est ce que confirment plusieurs sources révélées par des recherches relativement récentes [LEVY, 1989, XLII/3, pp. 193-239]. On apprend ainsi que Maïmonide a été l'auteur de *Ḥawāshī ôalā baôḍ ashkāl kitāb al-makhrñṭāt* [Gloses sur certaines propositions du livre des coniques] [LANGERMANN, I, 1984, pp. 57-65]. Il s'est également intéressé à la propriété asymptotique de l'hyperbole, dans le cadre des débats philosophiques et théologiques de son époque [MUNK, 1856, I, pp. 409-410]. Ce qui a d'ailleurs initié une véritable tradition hébraïque dans ce domaine. Parallèlement, une tradition latine a commencé à se constituer à partir de textes arabes traitant ce thème des asymptotes [CLAGETT, 1954, 11, pp. 359-385].

Dans la tradition arabe de l'Occident Musulman, le plus ancien mathématicien connu qui s'est référé au livre de l'*Istikmāl* d'al-Mu'taman est Ibn Mun^{c}im (m. 625/1228). Il évoque son prédécesseur une première fois pour conseiller au lecteur d'utiliser, comme lui, les outils de l'analyse et de la synthèse pour établir les résultats mathématiques. Puis, tout au long de son ouvrage, il se réfère explicitement à des propositions établies par al-Mu'taman, en donnant leur numéro, leur sous section, leur section, leur espèce et même leur genre. Comme l'ouvrage d'Ibn Mun^{c}im ne traite pas de géométrie, toutes ses références renvoient à la première espèce qui est, comme on l'a déjà dit, consacrée à la théorie des nombres. Mais le biobliographe Ibn ^{c}Abd al-Malik (XIII^{e} s.) nous informe que le mathématicien de Marrakech était un grand connaisseur de la géométrie et qu'il avait consacré au moins un livre à ce sujet, intitulé *Tajrīd akhbār kutub al-handasa ôalā ikhtilāfi maqāṣidihā* [L'abstraction des matériaux des livres de géométrie sans distinction de leurs buts «respectifs»] [DJEBBAR, 1995, pp. 35-46]. Cet ouvrage, qui n'a pas encore été retrouvé, pourrait contenir des références à la partie géométrique de l'*Istikmāl*. Après lui, Ibn al-Bannā (m. 721/1321) s'est, à son tour, référé, avec précision, au livre d'al-Mu'taman dans sa *Risāla fī t-taksīr* [Epître sur le mesurage] [Ms. Tunis, Bibliothèque Nationale, n° 9002, ff. 131a-132b]. Malheureusement ce mathématicien n'est pas connu pour avoir été un spécialiste en géométrie, même si le témoignage d'un de ses étudiants, al-Ābilī (qui lui rendit visite en 1310), le montre en train d'étudier les *Coniques* [DJEBBAR & ABALLAGH, 2001, p. 61]. Nous ne pouvons donc pas affirmer que, par son intermédiaire, la partie des sections coniques de *l'Istikmāl* a été enseignée à Marrakech où a longtemps vécu ce mathématicien. Quoi qu'il en soit, des copies de l'ouvrage d'al-Mu'taman sont encore attestées jusqu'à la seconde moitié du XIV^{e} siècle, comme le montre la référence explicite que l'on trouve dans le *Kitāb at-tamḥīs fī sharḥ at-Talkhīṣ* [Livre de l'étude approfondie sur le commentaire de *l'Abrégé*] d'Ibn Haydūr (m. 1413) [IBN HAYDŪR, I, p. 72]. Après lui, aucun écrit mathématique connu n'évoque l'*Istikmāl*. Ce qui n'est pas vraiment étonnant lorsqu'on sait, qu'à partir de la seconde moitié du XIVe siècle, la géométrie «supérieure» a été de moins en moins étudiée et que le contenu de son enseignement en Andalus puis au Maghreb, après la reconquête de Grenade, s'est réduit à la géométrie pratique du mesurage [AL-MANŪN, 1965, 2, pp. 101-104] ; [DJEBBAR, 2000, pp. 49-66]. Ce qui n'a pas été le cas dans une autre région de l'empire musulman, celle où a vécu Ibn Sartāq, un mathématicien inconnu jusqu'au début des années 80 du siècle précédent, même auprès des spécialistes de l'histoire des mathématiques.

Ibn Sartāq et son Kitāb al-Ikmāl

Le nom complet de ce géomètre est Shams ad-Dīn Muḥammad ibn Sartād ibn Jūbān ibn Sharkīr ibn Muḥammad Ibn Sartāq al-wararqī (ou al-Wararqaynī) al-Marāghī. Sur sa vie et sa formation, nous n'avons aucune information sauf que certains éléments de son nom laissent à penser qu'il serait d'origine turque ou persane[7]. D'après des indications contenues dans l'une des deux copies de *l'Ikmāl*, il semble qu'il ait fréquenté la Madrasa (collège supérieur) de la ville de Nakīsār en Asie Mineure [DJEBBAR, 1997, pp. 186-187]. Avant la réalisation de *l'Ikmāl*, il a publié une épître sur la théorie des rapports, intitulée *al-Uṣūl al-handasiyya* [Les fondements de la géométrie]. Son contenu se rattache à la fois à la tradition euclidienne du Livre V et à celle développée par certains mathématiciens des pays d'Islam, comme al-Māhānī et ôUmar al-Khayyām et qui repose sur le procédé de l'anthyphérèse. L'auteur signale deux fois cette épître dans son ouvrage.

On sait aussi, grâce au titre originel de l'*Ikmāl* et à la dédicace encore lisible dans la copie d'Istanbul, qu'il a été l'élève de Naṣīr ad-Dīn (m. 715/1315), l'un des fils de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī (m. 673/1274) [DJEBBAR, 1997]. Selon toute vraisemblance, nous sommes donc en présence d'un mathématicien qui s'est formé à Maragha et qui a fréquenté les cours de certains professeurs éminents qui ont travaillé dans l'observatoire de cette ville. Ce qui expliquerait sa très bonne connaissance de la géométrie des *Eléments* et de celle des *Coniques*. On peut supposer aussi que, comme étudiant, il a bénéficié du contenu des nouvelles rédactions de certains ouvrages grecs. Ce fut en particulier le cas pour les *Coniques* d'Apollonius qui connaîtront, à son époque, deux «rédactions» [*Taḥīr*], celle de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī et celle d'Ibn Shukr al-Maghribī [SEZGIN, 1974, V, p. 141]. Ce n'est donc pas étonnant qu'il se soit engagé dans un projet similaire mais, cette fois, avec un ouvrage de la tradition mathématique arabe, le *Kitāb al-istikmāl* d'al-Mu'taman.

La comparaison de la structure globale de l'*Ikmāl* avec celle de l'*Istikmāl*, confirme le fait qu'il s'agit bien d'une rédaction, sans aucune proposition supplémentaire. Par contre, l'auteur prend, parfois, beaucoup de liberté dans sa manière de traiter le contenu de chaque proposition, en introduisant, sans toujours les signaler au moment voulu, des ajouts sous forme de lemmes, des anticipations au niveau des définitions des objets étudiés, des développements dans une démonstration et, parfois, des commentaires ou des digressions éloignés du sujet mathématique étudié[8] [Ms. Le Caire, Bibliothèque de l'Université, n° 23029, ff. 9v-10r.].

Quoi qu'il en soit, c'est grâce à cette rédaction que nous disposons aujourd'hui de l'ensemble du contenu du premier volume de *l'Istikmāl* et, en particulier, de la partie qui traite des propriétés des sections coniques.

4.4. Les sections coniques dans le Kitāb al-Istikmāl

Al-Mu'taman à consacré 50 propositions aux sections coniques. Elles occupent les deux sections du troisième chapitre de la quatrième partie du premier volume. Le chapitre en question est intitulée «*la troisième "sous-espèce" de la quatrième espèce sur les sections de cylindre et de cônes circulaires*». La première de ses deux sections traite de «*l'existence des sections "coniques" et sur leurs premières propriétés, sans relations des unes avec les autres*». Les propositions, qui sont au nombre de 27, précédées par 23 définitions, sont actuellement réparties dans trois fragments distincts de l'*Istikmāl*, qui se trouvent dans le manuscrit de Copenhague, ainsi que dans l'*Ikmāl* d'Ibn Sartāq qui en a conservé l'ordre et donc la numérotation [*Kitāb al-istikmāl* : Ms. Copenhague, Royal Library, Or. 82; *Kitāb al-ikmāl* : Ms. Le Caire, Bibliothèque de l'Université, n° 23029]. Voici cette répartition entre les deux manuscrits (sachant que la rédaction d'Ibn Sartāq contient toutes les propositions).

La seconde section traite des «*propriétés des lignes, des angles et des surfaces des sections "coniques" en relation entre les uns avec les autres*». Elle contient 23 propositions qui se trouvent toutes dans le manuscrit de Copenhague [HOGENDIJK, 1991, pp. 259-269].

L'analyse du contenu de la première section et sa comparaison avec celui d'une partie des *Coniques* d'Apollonius nous permet de faire quelques remarques sur les énoncés des définitions et des propositions, sur les méthodes de démonstration et sur certaines particularités qui distinguent le travail d'al-Mu'taman d'autres projets de la tradition arabe ayant concerné un grand classique du corpus mathématique grec.

Au niveau des définitions, 23 d'entre elles précèdent les propositions et 7 autres, insérées dans la proposition 4, concernent spécifiquement l'ellipse et ne font que répéter certaines déjà énoncées. Ce qui laisse à penser que c'est un ajout d'Ibn Sart[a]q. Une 30[e] définition précède l'énoncé de la proposition 20 et concerne les hyperboles conjuguées.

Définitions	*Istikmāl*	ff. 90v-91v.
Propositions 1 à 2 :	*Istikmāl*	ff. 91b-92r, *l.* 24
Proposition 3	*Istikmāl*	ff. 92r, *l.* 25-92v, *l.* 31 = Première partie de la proposition
	Ikmāl	ff.118r, *l.* 17-118r, *l.* 20 = Seconde partie de la proposition
Propositions 4-10	*Ikmāl*	ff. 119r, *l.* 7-134r, *l.* 1
Proposition 11	*Ikmāl*	ff. 132r, *l.* 12-134r, *l.* 11 = Première partie de la proposition
	Istikmāl	ff. 93r, *l.* 1-93v, *l.* 31 = Seconde partie de la proposition
Propositions 12-24	*Istikmāl*	ff. 94r-120v, *l.* 2
Proposition 25	*Istikmāl*	ff. 120v, *l.* 3-130v, *l.* 31 = Première partie de la proposition
	Ikmāl	ff. 153r, *l.* 17-153r, *l.* 20 = Seconde partie de la proposition
Propositions 26-27	*Ikmāl*	ff. 153r, *l.* 20-158r, *l.* 16

Ces définitions ont été comparées à celles de cinq écrits antérieurs au XI^{e} siècle qui ont eu à traiter, d'une manière ou d'une autre, le thème des sections coniques : *Les Eléments* d'Euclide (III^{e} s. av. J.-C.), *Les Coniques* d'Apollonius (III^{e} s. av. J.-C.), Le *Livre de la section de cylindre* et le *Livre de la section de cône* de Sérénus (IV^{e} s.), le *Kitāb fī quṭūô al-usṭuwāna wa basīṭuhā* [Livre sur les sections du cylindre et sa surface] de Thābit Ibn Qurra (m. 289/901) et les fragments du *Kitāb al-kabīr fī l-handasa* [Le grand livre sur la géométrie] d'Ibn as-Samḥ (m. 426/1035).

Nous avons retenu l'ouvrage de Sérénus alors qu'il ne semble pas avoir été traduit en arabe, parce qu'il est tout à fait possible que son contenu ait circulé, totalement ou partiellement, à travers des citations, des rédactions ou des commentaires[9]. Le traité d'Ibn Qurra est le plus ancien texte arabe sur le sujet qui nous soit parvenu. Son intérêt tient aussi au fait que son auteur a été l'un des traducteurs des *Coniques* d'Apollonius. Même si le livre d'Ibn as-Samḥ ne nous est parvenu qu'à travers des fragments (qui ont survécu dans une version hébraïque), l'origine andalouse de son auteur et l'époque où il a vécu rend tout à fait probable la circulation de cet important ouvrage et sa présence à Saragosse au cours de la seconde moitié du XI^{e} siècle.

Les remarques suivantes découlent de l'étude comparative faite dans [BOUZARI, 2008, pp. 255-257]. En ce qui concerne les différents groupes de définitions, on constate qu'à l'exception de la première phrase de la première définition[10], les formulations de toutes les définitions de l'*Istikmāl*, relatives aux sections de cône, ainsi que l'ordre de leur exposition, sont identiques aux formulations et à l'ordre des définitions des *Coniques* d'Apollonius telles qu'elles nous sont parvenues à travers l'une des traductions arabes. Les noms des objets définis sont également identiques dans les deux textes.

L'ordre dans lequel al-Mu'taman définit les éléments du cylindre est différent de celui de Thābit Ibn Qurra. La formulation de la définition du cylindre chez ce dernier est différente de celle d'al-Mu'taman. Le premier décrit un mouvement qui génère uniquement la surface latérale du cylindre puis il définit le cylindre lui-même. Le second décrit un mouvement qui génère directement le cylindre, à partir du mouvement des deux diamètres des cercles parallèles et une arête qui joint une de leur extrémité.

Pour définir le cylindre droit et oblique, al-Mu'taman utilise l'axe et la base du cylindre. Thābit les définit à partir de la hauteur. Dans les *Eléments*, le cylindre est obtenu par rotation d'un rectangle autour de l'un de ses côtés. Chez Ibn as-Samḥ, il y a une première définition à partir de la rotation d'un rectangle autour de l'un de ses côtés et une seconde, plus générale, à partir d'une «*figure ronde d'un contour quelconque*» [LEVY, 1996, pp. 885-895.].

Ces quelques différences laissent à penser que, pour sa définition du cylindre droit et oblique, al-Mu'taman ne s'est pas inspiré de ses prédécesseurs (au cas où il aurait connu leurs écrits).

Quant à Ibn Sartāq, il reproduit fidèlement les définitions déjà évoquées (même si sa présentation est plus succincte et ne correspond pas complètement à l'ordre d'exposition d'al-Mu'taman), et il en ajoute deux : celle du «*cylindre infini*» et celle du «*cône infini*». Le premier est défini ainsi : «*Si on imagine que la ligne en rotation est infinie dans les deux directions, le cylindre sera alors infini aux deux extrémités et il n'aura pas de bases*» [Ms. Le Caire, f. 113v.]. La définition du second est semblable. Pour valider le mouvement qui engendre les solides, il introduit la notion de «*tashābuh*» [similitude]. Ce qui assure, selon lui, le parallélisme de l'arête et de l'axe du cylindre. Il faut enfin remarquer, qu'à ce niveau déjà, son exposé est encombré de digressions qui sont des anticipations sur les définitions des sections coniques et sur certaines de leurs propriétés.

En ce qui concerne les problèmes étudiés, l'exposé d'al-Mu'taman s'éloigne de celui des *Coniques* de plusieurs manières : un certain nombre de propositions sont soient abandonnées soient énoncées comme corollaires et sans démonstration. Celles qui sont traitées le sont de la manière la plus concise possible. Cela se fait, par exemple, en regroupant plusieurs propositions en une seule. C'est en particulier le cas lorsqu'il s'agit d'établir une propriété commune aux trois sections coniques. Ou bien en établissant une propriété pour une seule des trois sections coniques, comme c'est le cas dans son étude des foyers.

Pour un certain nombre de propositions comme, par exemple, la 22e et la 26e, al-Mu'taman ne retient que la partie de la démonstration qui correspond à la synthèse et abandonne l'analyse. Pourtant, c'est avec cette méthode de démonstration qu'il établit certains résultats [HOGENDIJK, 1991, p. 217]. Une autre manière de rendre les démonstrations plus concises est celle qui consiste à proposer une autre preuve, originale, qui utilise des résultats antérieurs. On en a un exemple avec la proposition 10 qui utilise III.1.2(7).

Parmi les éléments de cette section qui pourraient être des contributions d'al-Mu'taman ou bien des reprises de résultats établis par d'autres mathématiciens de la tradition arabe, il y a quelques ajouts à des résultats d'Apollonius, comme dans les propositions 1 et 11, des généralisations, comme dans la proposition 3 (qui traite des mêmes problèmes que les propositions 4, 5 et 9 du Livre I des *Coniques*) ou comme dans la proposition 12 où il se contente d'énoncer une généralisation à des triangles du résultat établi pour des quadrilatères associés à l'hyperbole et à l'ellipse. Il y a surtout l'énoncé et la démonstration d'une proposition, la cinquième, qui n'a pas d'équivalent chez Apollonius.

Au niveau de la terminologie qui intervient dans la section qui nous intéresse ici, al-Mu'taman reprend celle de la version arabe des *Coniques*, sauf pour un terme, celui qui exprime la notion de «*produit*». Pour parler de «l'aire» d'un rectangle de côtés *a* et *b*, il utilise en effet l'expression «*misaṭṭa a fī b*,» [surface de *a* par *b*]. Or, dans la version arabe des *Coniques* qui nous est parvenue, et qui a été révisée par les frères Banū Mūsā, on trouve l'expression «*ḍarb a fī b*» [produit de *a* par *b*]. Il faut également rappeler que dans leur «*Kitāb maôrifat misā at al-ashkāl al-basīṭā wa l-kuriya*», ces auteurs utilisent, indifféremment les expressions «*ḍarb a fītb*» et «*saṭḥ a fī b*» pour désigner cette opération [RASHED, 1996, I, pp. 1054, 1058]. En comparaison, la version grecque des *Coniques* utilise l'expression, plus géométrique, de «*rectangle délimité par les droites a et b*» [APOLLONIUS, 1963, I, pp. 11, 20]. Nous ne savons pas si al-Mu'taman a repris le terme utilisé dans une autre version arabe des *Coniques* ou s'il a délibérément conservé le terme «géométrique» classique.

Il nous reste à dire quelques mots sur les spécificités de la rédaction d'Ibn Sartāq. Ce dernier affirme, au début de son ouvrage, que son but était d'expliciter et de compléter le travail d'al-Mu'taman. Et, de fait, il ne manque aucune occasion pour développer certains aspects, proposer de nouvelles démonstrations ou faire des commentaires qui vont au-delà du sujet traité. Cette démarche est bien illustrée par ses compléments à la proposition IV.3.1(4) dans laquelle il consacre les deux tiers de son exposé à des développements concernant les propriétés de l'ellipse. On peut supposer que ces développements, et ceux qui ont enrichi d'autres propositions, étaient motivés par la difficulté du sujet à une époque, le XIIIe siècle, où les *Coniques* n'étaient peut-être plus un objet d'étude aussi central pour les géomètres, les algébristes et les astronomes, qu'il ne l'a été aux IXe-XIe siècles.

C'est peut-être la nature même de ce type de «rédaction-commentaire» renforcé par le style particulier d'Ibn Sartāq qui a éloigné ce dernier de la démarche adoptée par al-Mu'taman plus fidèle à la structure interne d'une proposition, telle qu'elle avait été héritée de la tradition grecque: énoncé général de la proposition (*protase*), exposé du même énoncé à l'aide des éléments d'une figure (*ectèse*), justification déductive de la propriété à démontrer (*apodeixis*) ou de la construction de l'objet cherché (*kataskeué*) et, enfin, conclusion reformulant l'énoncé de la proposition (*symperasma*) [Euclide, 1990, I, p.137]. Cela dit, c'est cette différence de style qui permet souvent de distinguer ce qui est une rédaction du texte d'al-Mu'taman de ce qui est un développement d'Ibn Sartāq.

5. Conclusion

Durant ces dernières années une série d'études consacrée à la tradition mathématique arabe de l'Occident Musulman a été entreprise. Une des questions à laquelle devaient répondre ces études est la circulation des idées scientifiques entre l'Orient et l'Occident musulman. Grâce, essentiellement, à la découverte, à l'identification parfois et à l'analyse comparative d'un certain nombre de manuscrits produits en Orient, au Maghreb et en Andalus, des éléments concernant cette circulation commencent à être repérés.

Ainsi, en ce qui concerne la tradition des coniques et leurs applications, le contenu du fragment de l'ouvrage perdu d'Ibn as-Samḥ, autorise à penser que ce mathématicien a peut-être disposé d'une copie du livre d'al-Ḥasan Ibn Mūsā sur les ellipses publié à Bagdad au début du IXe siècle.

D'un autre côté, le témoignage d'Ibn Bājja sur les travaux d'Ibn Sayyid, permet d'affirmer que les écrits, concernant les deux fameux problèmes, qui sont la trisection de l'angle et la duplication du cube, étaient connus dans certains milieux scientifiques d'al-Andalus.

Al-Mu'taman lui-même nous fournit des éléments en faveur de la circulation d'ouvrages mathématiques orientaux vers l'Andalus puisqu'on trouve dans le *Kitāb al-istikmāl* des problèmes, des méthodes et des démarches d'ouvrages orientaux bien connus, comme le *Kitāb at-taḥīl wa t-tarkīb* [Le livre de l'analyse et de la synthèse] d'Ibn al-Haytham ou l'épître d'Ibrāhim Ibn Sinān (m. 946) sur le calcul d'une portion de parabole.

D'un autre côté, la rédaction par Ibn Sartāq (XIVe s.) du *Kitāb al-Istikmāl* d'al-Mu'taman est un précieux témoignage de la circulation vers l'Orient, d'ouvrages mathématiques produits en Occident musulman.

NOTES

1. Ibn Khaldūn rapporte qu' : «*Il nous est parvenu qu'une sommité parmi les mathématiciens d'Orient a étendu "le nombre" des équations au-delà de ces six types et qu'il est arrivé à plus de vingt. Et il a déterminé, pour toutes "ces équations", des résolutions solides à l'aide de preuves géométriques*».[IBN KHALDŪN, 2005, III, p. 81].
2. Voici les titres fournis par Ṣā^c^id : *Kitāb al-mudkhal ilā l-handasa* [Livre sur l'introduction à la géométrie], *Kitāb al-mu^c^āmalāt* [Livre sur les transactions], *Kitāb Ḥabī^c^at al ^c^adad* [Livre sur la nature du nombre] et *al-Kitāb al-kabīr fī l-handasa* [Le grand livre sur la géométrie]. [ṢĀ^c^ID, 1985, p. 85].
3. Les informations sur ce mathématicien ont été tirées de DJEBBAR, A. (1993) *Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e^ siècle : al-Mu'taman et Ibn Sayyid*, Colloque International sur «*Les Mathématiques autour de la Méditerranée jusqu'au XVIIe siècle*» (Marseille-Luminy, 16-21 Avril 1984). In: M. Folkerts & J.P. Hogendijk (ed.) *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard*. Amsterdam-Atlanta, GA, 84-91.
4. Ibn Sartāq en donne la table des matières dans les termes suivants: «*(1) La science des graves et des automates et les propriétés dont ils font montre lorsqu'ils sont considérés individuellement ou en corrélation; (2)La sciences de la musique et la mise en évidence des particularités des notes selon qu'elles sont considérées individuellement ou en corrélation et en fonction de leurs [différentes] catégories;(3) La science de l'optique, des lumières et des rayons [lumineux] selon les objets sur lesquels ils tombent; (4) La science de la structure de l'univers et de l'étude des mouvements des corps célestes jusqu'au point où l'homme peut y parvenir; (5) La science de l'analyse et de la synthèse selon un point de vue global*«.
5. SAMSO y donne les précisions suivantes «*Quand en 1110 les Almoravides ont conquis Saragosse, les Banū Hūd se sont réfugiés à Rueda del Jalón et c'est là que la bibliothèque d'al-Mu'taman devait se trouver lorsque le roi Alphonse 1^e^ a conquis la région. L'évêque Michel de Tarazona (en fonction en 1119-1151) s'est intéressé à certains des manuscrits qui se trouvaient à Rueda et a soutenu les traductions de Hugo de Santalla ainsi que, probablement, celles de ses contemporains Hermann de Carinthie (actif en 1138-1143) et Robert de Ketton (actif en 1141-1157), qui tous deux travaillaient à Tudela, près de Tarazona*».

6. Nous pensons en particulier aux écrits sur le calcul et le mesurage d'Abrahām Bar Ḥiyya, d'Ibn Ezra, d'Abū Bakr. Pour plus de détails voir MOYON [2008].
7. Cette information nous a été oralement donnée le pr. Djebbar.
8. Bien qu'il ait toutefois pris soin d'avertir le lecteur, au début de son exposé, en indiquant: «*S'il m'arrive, à l'avenir, d'introduire certains éclaircissements, je dirais à la fin de ces éclaircissements :* "ceci est une remarque utile". *Et s'il m'arrive de compléter une proposition (…), je dirais à la fin de cette addition :* "ceci est un complément" *ou, plus simplement, je dirais :* "ceci a été rédigé autrement" *ou quelque chose de semblable*» [Ms. Le Caire, Bibliothèque de l'Université, n° 23029, ff. 9v-10r].
9. Pour notre étude comparative, seul le premier livre de Sérénus nous intéresse ici. En effet, pour les éléments du cône, Sérénus lui-même renvoie aux définitions d'Apollonius [SERENUS, 1969, p. 3].
10. Dans la version arabe des *Coniques*, on lit ceci : «*Si on joint, entre un point quelconque et une ligne entourant un cercle, à l'aide d'une ligne droite, et que le cercle et le point ne soient pas dans un même plan, et que l'on prolonge la ligne droite dans les deux directions, et que l'on fixe le point afin qu'il ne se détache pas*». La formulation d'al-Mu'taman est celle-ci : «*Et si «on a» un cercle et un point fixe qui n'est pas dans son plan et qu'on le joigne au périmètre du cercle à l'aide d'une ligne droite sortant «au-delà» du point fixe*».

BIBLIOGRAPHIE

APOLLONIUS *Kitāb al-makhrūṭāt*. BANŪ MŪSĀ (trad). Ms. Mashhad, Astān Quds, n° 5391.

APOLLONIUS (1959) *Les Coniques*. Paris, Blanchard.

APOLLONIUS DE PERGE (2008) *Coniques*. Berlin-New York, De Gruyter.

BALTY-GUESDON, M.-G. (1992) *Médecins et hommes de sciences en Espagne musulmane (IIe/VIIIe-Ve/XIe s.)*. Thèse de Doctorat. Paris, Université de la Sorbonne Nouvelle-Paris III.

BOUZARI, A. (2008) *La géométrie des coniques dans la tradition de l'Occident Musulman à travers le Kitāb al-Istikmāl [Livre de l'accomplissement] d'al-Mu'taman (m.1085)*. Thèse de Doctorat, Université de Lille1.

BOUZARI, A (2006) «Les coniques de l'Istikmāl d'al Mu'taman (m. 1085) dans la rédaction d'Ibn Sartāq (XIVe S)». In: *Actes du 8ème Colloque sur l'Histoire des Mathématiques Arabes* (Tunis, 20-23 décembre 2004). ATSM.

BOUZARI, A (2005) «Les sections coniques en Orient Musulman et leurs prolongements en Occident Musulman (VIIIe-XIe S.)». In: *Actes du 7ème colloque international sur l'histoire des mathématiques* (Marrakech, 14-16 juin 2002). Marrakech, ENS, 37-49.

CLAGETT, M. (1954) «A Medieval Latin Translation of a Short Arabic Tract on the Hyperbola». *Osiris*, *11*. 359-385.

DJEBBAR, A. & ABALLAGH, M. (2001) *Ḥayāt wa mu'allafāt Ibn al-Bannā al-Murrākushī [La vie et l'œuvre d'Ibn al-Bannā al-Murrākushī]*. Université Mohamed V, Publications de la Faculté des Lettres et Sciences Humaines.

DJEBBAR, A. (1985) *L'analyse combinatoire au Maghreb : l'exemple d'Ibn Munᶜim (XIIᵉ-XIIIᵉ siècles)*. Paris, Université Paris-Sud. Prépublication, *3(83)*. Publications Mathématiques d'Orsay, *1(85)*.

DJEBBAR, A. (1990) «Lettre d'Ibn Bājja à Ibn al-Imām». In: A. Djebbar, *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval (IXᵉ-XVIᵉ s.), Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman*. Thèse de Doctorat, Université de Nantes.

DJEBBAR, A. (1993) «Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XIᵉ siècle : al-Mu'taman et Ibn Sayyid». *Colloque International sur Les Mathématiques autour de la Méditerranée jusqu'au XVIIe siècle* (Marseille-Luminy, 16-21 Avril 1984). In: M. Folkerts & J.P. Hogendijk (ed.) *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard*. Amsterdam-Atlanta, GA, 84-91.

DJEBBAR, A. (1995) «La contribution mathématique d'al-Mu'taman et son influence hors d'al-Andalus». *Actes du colloque international sur Huit siècles de mathématiques en Occitanie, de Gerbert et des Arabes à Fermat* (Toulouse, 10-13 Décembre 1992). Toulouse, CIHSO, 35-46.

DJEBBAR, A. (1997) «La rédaction de l'Istikmāl d'al-Mu'taman (XIᵉ s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIIIᵉ-XIVᵉ siècles». *Historia Mathematica*, *24*, 185-192.

DJEBBAR, A. (1999) «Les livres arithmétiques des Eléments d'Euclide dans une rédaction du XIᵉ siècle : le *Kitāb* al-istikmāl d'al-Mu'taman (m. 1085)». *Llull, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 22(45)*, 589-653.

DJEBBAR, A. (2000) «Les activités mathématiques au Maghreb à l'époque ottomane (XVIᵉ-XIXᵉ siècles)». In: E Ihsanoglu, A. Djebbar & F. Günergun (ed.) *Actes du Symposium sur Science, Technology and Industry in the Ottoman World* (XXᵉ Congrès International d'Histoire des Sciences, Liège, 20-26 Juillet 1997). Liège, Brepols, 49-66.

DUNLOP, D.M. (1965) «Hūdides». In: *Encyclopédie de l'Islam II*, 560-562.

EUCLIDE (1998) *Les Éléments*. Paris, Presses Universitaires de France.

HOGENDIJK, J.P. (1991) «The geometrical Part of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd (11th century), An analytical Table of Contents». *Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 41,* 207-281.

HOGENDIJK, J.P. (1986) «Arabic Traces of Lost Works of Apollonius». *Archive for History of Exact Sciences, 35*, 223-224.

HOGENDIJK, J.P. (2004) «The lost geometrical parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century) in the redaction of Ibn Sartāq (14th century) : An Analytical Table of Contents». *Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 53*, 19-34.

IBN AL-ABBĀR (1886) *At-Takmila li Kitāb aṣ-Ṣila [Appendice au Livr*e aṣ-Ṣila]. Madrid, Ed. Codera & Zaydin.

IBN AL-AKFĀNĪ (1998) *Irshād al-qāṣid ilā asnā al-maqāṣid [Le guide du chercheur vers les buts les plus élevés]*. M. FĀKHŪRĪ - M. KAMĀL - H. AṢ-ṢADDĪQ (éd.). Maktabat Lubnān Nāshirñn. Beyrouth.

IBN AL-QIFṬĪ (non daté): *Ikhbār al-culamā' bi akhbār al- ḥukamā' [Livre qui informe les savants sur la vie des sages]*. Dār al-āthār. Beyrouth.

IBN BĀJJA (1983) *Maqāla fī ibanāt faḍl cAbd ar-Rahmān Ibn Sayyid al muhandis [Epître qui montre la prééminence de cAbd ar-Rahmān Ibn Sayyid le géomètre]*. Dans : J. ALAOUI *Rasā'il falsafiya li Abī Bakr Ibn Bājja [Lettres philosophiques d'Abū Bakr Ibn Bājja]*. Casablanca, Dār an-nashr al-maghribiyya.

IBN cAQNĪN (1968) *Tibb an-Nufñs [La médecine des âmes]*. In: M. GÜDEMANN *Das Jüdische Unterrichtswesen Wärend des Spanisch-Arabischen Period*. Vienne, Carl Gerold's Sohn, 1875. Réimpression, Amesterdam, Philo Press.

IBN KHALDŪN (1983) *Kitāb al-cibar.* Beyrouth, Dār al-hitāb al-lubnānī.

IBN KHALDŪN (2005) *Al-Muqaddima [Les Prolégomènes]*. A. CHEDDADI (éd.). Casablanca, Bayt al-funūn wa l-culūm wa l-ādāb.

cINĀN, M.A. (1960) *Duwal aṭ-ṭawā'if [Les Etats des Taïfas]*. Le Caire.

LANGERMANN, Y.-T. (1984) «The Mathematical Wrintings of Maïmonides». *The Jewish Quaterly Review*, *1(LXXV)*, 57-65.

LEVY, T. (1989) «L'étude des sections coniques dans la tradition médiévale hébraïque : Ses relations avec les traditions arabe et latine». *Revue d'Histoire des Sciences*, *(3/XLII)*, 193-239.

LEVY, T. (1996) «Fragment d'Ibn al-Sam sur le cylindre et sur ses sections planes». In: R. Rashed (ed.) *Les Mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle, I,* pp. 885-895.

MANŪNĪ (AL-), M. (1965) «Asātidhat al-handasa wa mu'allifīhā fī l-Maghrib as-sacdī [Les enseignants de la géométrie et ses auteurs dans le Maghreb saadide]». *Revue Dacwat al-ḥaqq*, *2(9)*.

MAQQARI (AL-), (1968) *Naḥ aṭ-ṭīb min ghuîn al-Andalus ar-raṭīb [L'exhalaison du parfum de la tendre branche d'al-Andalus]*. cABBĀS, I. (éd.). Beyrouth, Dār Sādir.

MOYON, M. (2008) La *géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple du mesurage et du découpage : Contribution à l'étude des mathématiques médiévales»*. Thèse de Doctorat. Lille, Université de Lille 1.

MUNK, S. (1866) *Le guide des égarés*. Paris, A. Franck.

RASHED, R. (1996) *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècle, Volume 1: Fondateurs et commentateurs»*. Londres, Al-Furqān Islamic Heritage Foundation.

ṢĀᶜID, AL-ANDALUSĪ (1985) *Kitāb Ṭabaqāt al-umam [Livre des catégories des nations],* BUᶜALWĀN, Ḥ (éd.). Beyrouth, Dār aṭ-ṭalīᶜa li ṭ-ṭibāᶜa wa n-nashr.

SAMSO, J. (2005) «La circulation des sciences arabes en Europe». In: A. Djebbar (ed.) *L'âge d'or des sciences arabes*. Catalogue de l'exposition de l'Institut du Monde Arabe (Paris, 25 octobre 2005-19 mars 2006). Paris, Actes Sud-I. M.A.

SERENUS (1969) *Le livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône*. Paris, Blanchard.

SEZGIN, F. (1979) *Geschichte des arabischen Schrifttums.* Leiden, E. J. Brill, *Vol. V*, 1974; *Vol. VI*, 1978; *Vol. VII*, 1979.

TURK, A. (1978) *El reino de Zaragoza en el siglo XI de Cristo (V de la Hégira)*. Madrid, Publicacions del Instituto Egipcio de Estudios Islámicos en Madrid.