MANOEL DE CAMPOS, UM PRECURSOR[1]

Luiz Carlos Guimarães
João Bosco Pitombeira
Gert Schubring
Universidade Federal do Rio de Janeiro (Brasil)

Abstract

The challenge of understanding the interplay of the ideas of equidecomponibility and equivalence of volume of polyhedra has fascinated many generations of mathematicians, until Max Dehn finally came up with a satisfactory explanation in 1900. Our paper discusses the complex process of how mathematicians became aware of the weaknesses in Euclid's proof of his theorem XI.28. The paper analyzes the work of contributors already somewhat studied by the literature, like Clavius, Tacquet, Stafford, Simson, Simpson, Legendre, Ampère, and Lacroix, and also studies the hitherto almost unknown but highly relevant contributions by Fournier and by Manoel de Campos. The focus is in fact on this eighteenth century Portuguese mathematician whose solution, coming from Europe's margin, was first acknowledged by a Brazilian.

Resumo

O desafio de compreender como se relacionam os conceitos de equidecomponibilidade e equivalência de volume de poliedros fascinou muitas gerações de matemáticos, até que uma resposta satisfatória fosse encontrada por Dehn em 1900. Nosso artigo analisa algumas contribuições já estudadas, como os de Clavius, Tacquet, Stafford, Simson, Simpson, Legendre, Ampère, and Lacroix e também estuda as contribuições pouco conhecidas mas muito relevantes feitas por Fournier e por Manoel de Campos. A ênfase é sobre este matemático português do século dezoito, cuja solução, proveniente das margens da Europa, foi reconhecida, em primeiro lugar, por um brasileiro.

Palabras clave: Matemáticas, Geometría, Siglo XVIII, Portugal, Brasil, poliedros, pirámide, equidescomponibilidad, simetría, Manoel de Campos, Legendre.
Keywords: Mathematics, Geometry, 18th Century, Portugal, Brazil, Polyhedra, Pyramid, Equidecomponibility, Symmetry, Manoel De Campos, Legendre.

Recibido el 20 de diciembre de 2010 – Aceptado el 29 de marzo de 2011

Introdução

No fim do século XVIII, a «geometria dos sólidos» não estava estabelecida sobre fundamentos tão seguros quanto a geometria plana. Isto era sentido mesmo quando se deixavam de lado problemas mais profundos como, entre outros, o status do axioma das paralelas, só resolvido durante o século XIX. A constituição de um conjunto completo de axiomas para a geometria euclidiana foi completada apenas no final do século XIX, por um grupo onde se destaca o nome de Hilbert, mas certamente vários problemas com a fundamentação dos elementos deixavam os matemáticos insatisfeitos já bem antes daquela época. Entre aqueles que se ocuparam do assunto, teve destacado papel o matemático francês Adrien Marie Legendre (1752 – 1833).

Um dos pontos imperfeitos na geometria dos sólidos era a necessidade de relacionar o cálculo do volume de uma pirâmide ao cálculo do volume do paralelepípedo. Em seus desenvolvimentos para atacar este problema, Legendre é levado a estudar, com alguma profundidade, a equidecomponibilidade de poliedros. Decorre daí sua conceituação de «sólidos simétricos» [LEGENDRE, 1794], considerada por Hon [2005] uma revolução.

Reservaremos para outro trabalho a discussão mais ampla do programa de Legendre para estabelecer sobre bases firmes o estudo dos sólidos. Aqui, nos limitaremos a discutir uma demonstração pioneira da Proposição XI.28 dos *Elementos de Euclides*. Em Euclides essa proposição aparece com uma demonstração incompleta, o que foi assinalado por alguns editores dos *Elementos*, como se verá adiante. É provável que o primeiro autor a apresentar uma demonstração correta, em 1735, tenha sido um matemático português, o Pe. Manoel de Campos (Lisboa,1681 – Lisboa, 1758). Este resultado é fundamental no desenvolvimento dos teoremas de Euclides sobre o volume das pirâmides, no Livro XII dos *Elementos*, proposições XII.5 – XII.9.

Como veremos, a contribuição de Campos passou completamente despercebida da comunidade matemática européia, e seu resultado só é recriado no princípio do século seguinte, provavelmente por André Marie Ampère[2] (1775 – 1836). O registro do resultado de Campos, anterior, parece ter sido feito pela primeira vez um século depois de sua publicação, por Francisco Vilela Barbosa (1769 – 1846), brasileiro que passou parte de sua vida em Portugal. Ele voltou ao Brasil com a Proclamação da Independência, vindo a se tornar o Marquês de Paranaguá. Em Lisboa, foi professor da Academia Real da Marinha e escreveu seu livro *Elementos de Geometria*, que teve três edições em Portugal. O mesmo livro foi publicado no Brasil, em 1838, «com melhoramentos feitos pelo auctor». No prólogo de sua obra, Paranaguá escreve [1838, pp. x- xii]:

> Era egualmente difficil, pelo menos não se soube por muito tempo, demonstrar com o rigor geométrico o Theorema no 308. Recurriam à Idea dos infinitos[3]; quando Legendre mais zeloso da exactidão tentou romper as trevas por um modo ingenhoso e elegante. Mas elle mesmo, e Lacroix que o seguira, não se satisfizeram depois com a evidencia desse methodo, como este dá a intender na nota

> da pág. 163 dos seus Elementos de Geometria, 4ª edição feita no anno de 1804, qual a que damos com pouca differença nesses Elementos: e a suppõe achada em primeiro logar por Mr. Ampère, Professor na Schola central de Lyão. Nós porém lha não concedemos em honra das Letras portuguesas; e declaramos que a temos lido nos Elementos de Geometria do padre Manoel de Campos, impressos em Lisboa no anno de 1735, e por conseguinte muito anterior a Mr. Ampère. Não queremos com isto tirar o mérito a este Professor; que pode bem ter-se encontrado em seu raciocínio com o Geômetra portuguez: só não consentimos que se attribua a aquelle a gloria de primeiro no invento; nem ainda a José Anastásio da Cunha, como alguns pretenderam, alias Geometra de mui distincta reputação.

Infelizmente, assim como a contribuição original de Manoel de Campos, esta observação de Vilela Barbosa foi completamente ignorada, inclusive pela comunidade erudita portuguesa ou brasileira.

É importante ressaltar que os problemas relacionados com o estudo do volume dos sólidos mais simples, hoje relegados à Matemática escolar, e que deram origem às noções de simetria e de equidecomponibilidade dos sólidos, eram problemas de pesquisa no fim do século XVIII e início do século XIX, haja vista as reflexões de Legendre sobre o assunto e a correspondência entre Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) e Christian Ludwig Gerling (1788 – 1864) [GAUSS, 1975]. Convém ainda lembrar que, como resultado do terceiro problema proposto por Hilbert no congresso de Paris, em 1900, Max Wilhelm Dehn [1900] foi levado a criar, essencialmente, o que hoje é conhecido como invariante de Dehn o qual caracteriza completamente os poliedros equidecomponíveis. Em particular, XI.28 foi tratada por Manoel de Campos, Sylvestre François Lacroix (1765 – 1843), Charles Félix Fournier e Legendre em um contexto «escolar», como parte de seus livros-texto de Geometria. Isso confirma a observação de Belhoste [1998] e Schubring [2001]: a história do ensino de Matemática é parte da história da Matemática.

A Proposição XI.28

Como etapa para demonstrar seus teoremas sobre volumes de pirâmides (*Elementos*, XII.5 – XII.9), Euclides enuncia, nos *Elementos*, o resultado importante que

Proposição XI.28 – *Se um paralelepípedo é cortado por um plano que passa pelas diagonais de planos opostos, o sólido será bissectado pelo plano*.

Mueller [1981, p. 218], salienta a importância de XI.28, afirmando que esta proposição fornece uma relação fundamental entre paralelepípedos e prismas triangulares e que ela é, parcialmente, análoga à relação entre paralelogramos e triângulos.

A demonstração de XI.28 apresentada por Euclides tem problemas, como descrito por Heath [1956, vol. 3, p. 331], ao comentar a prova feita por Robert Simson (1687 – 1768) em sua influente edição dos *Elementos*:

> Simson does not, however, seem to have noticed a more serious difficulty. The two prisms are shown by Euclid to be contained by equal faces – the faces are in fact equal and similar – and Euclid then infers at once that the prisms are *equal*. But they are not equal in the only sense in which we have, at present, a right to speak of solids being equal, namely in the sense that they can be *applied*, the one to the other. They cannot be so applied because the faces, though equal respectively, are not *similarly arranged*; consequently, the prisms are *symmetrical*, and it ought to be proved that they are, though not equal *and similar*, equal in content, or *equivalent*, as Legendre has it.

Mueller [1981, pp. 219-220] é de opinião que possivelmente Euclides percebia a diferença entre simetria e congruência, e que não podemos chegar a uma explicação de porque ele não abordou este tópico, talvez por acreditar que isso seria impossível ou muito complicado.

Vários outros editores e comentadores dos *Elementos* também não perceberam o erro de Euclides, como por exemplo Christofer Clavius (1538 – 1612), Andrea Tacquet (1612 – 1660) e o também jesuíta Ignace Stafford (1599 – 1642). Por outro lado, Thomas Simpson (1710 -1761), em [1747 e 1760] viu o erro de Euclides e tentou apresentar uma demonstração correta, mas ao custo de introduzir novos postulados.

Em duas cartas a Gerling, Gauss [1975, vol 8, pp. 241, 244] comenta que certos resultados de geometria espacial dependem, para serem demonstrados, do «método de exaustão», como, por exemplo, a proposição XII.5 dos *Elementos* de Euclides a qual afirma que duas pirâmides triangulares com alturas iguais têm seus volumes na mesma razão que as áreas de suas bases. Instigado pelos comentários de Gauss, Gerling demonstrou, em 1844, que dois poliedros simétricos têm volumes iguais, por meio da decomposição de ambos em partes congruentes – o mesmo resultado que já era demonstrado por Legendre em 1794, em uma Nota constante de seus *Eléments de géométrie*!

Legendre, insatisfeito com o tratamento dado até sua época à congruência e equivalência de poliedros é levado a introduzir o conceito de simetria de sólidos geométricos, em 1794, na primeira edição de seus *Éléments de géométrie*, o que Hon [2005], classifica como uma «revolução». Legendre mostra, na Nota VII de seus *Eléments de géométrie* [1794, pp. 305-306; 2009, Nota VIII, pp. 321-325] como provar que dois poliedros (convexos) simétricos são equidecomponiveis e, portanto, têm volumes iguais. Na Nota 8 [pp. 307-311] determina, usando métodos infinitesimais, o volume de uma pirâmide triangular, resultado que é transferido, em edições posteriores, para o corpo do texto.

Legendre [1794], na proposição VI, do Livro VI afirma que:

> Le plan BHDF, qui passe par deux arêtes parallèles opposées *BF*, *DH*, divise le parallélépipède *AG* en deux prismes triangulaires *ABDHEF*, *GHFBCD*, symétriques l'un de l'autre.

A prova dessa proposição, com as respectivas figuras, encontra-se no apêndice. Uma explicação lúcida da argumentação de Legendre pode ser lida em Enriques [1956, pp. 106-109].

Em um rascunho de carta incompleto, com data e destinatário desconhecidos, Ampère escreve [DE LAUNEY 1936, pp. 675-676][4]:

> Monsieur, en lisant avec le plus vif intérêt les additions dont vous venez d'enrichir votre excellent Traité de Géométrie élémentaire, j'ai remarqué surtout la démonstration contenue dans la note de la page 163 et qui a été trouvée par M. Fournier. Cette découverte m'a paru d'autant plus importante qu'il restait auparavant une lacune dans la série des démonstrations relatives à la mesure des volumes et qu'on était forcé, ou d'accoutumer les commençants à se contenter de preuves vagues et insuffisantes, ou de les engager dans la démonstration, presque inintelligible pour eux, qu'on trouve dans les notes de la géométrie de Legendre. Me serait-il permis, Monsieur, de faire une réclamation, trop tardive à la vérité et qui ne saurait d'ailleurs diminuer en aucune manière la gloire qu'a méritée celui qui vous a communiqué cette démonstration? Je l'avais trouvée depuis plusieurs années; je l'avais présentée en l'an VIII [1799-1800] à l'Académie de Lyon, dans un mémoire que j'envoyai peu de temps après à Paris par l'entremise de M. Jantel, autrefois commissaire du gouvernement auprès du département du Rhône, et aujourd'hui receveur des contributions à Corbeil. Ce qu'il y a de singulier, c'est que M. Jantel m'écrit qu'il avait remis mon mémoire à M. Guyton de Morveau qui s'était chargé de le faire passer à M. Legendre et qu'ayant fait prendre des renseignements à ce sujet auprès de ce célèbre chimiste, j'ai su qu'il n'en avait jamais entendu parler. Ce mémoire ne contenait pas seulement la démonstration de l'égalité de deux prismes triangulaires inverses ou symétriques, mais encore celle de l'égalité de deux pyramides triangulaires [...] ou inverses et, par conséquent, de deux polyèdres de quelqu'espèce que ce soit. Comme cette dernière démonstration [...].

Segundo o editor da correspondência de Ampère, esta carta teria sido escrita provavelmente em 1825. O fato de ela referir-se a uma demonstração contida na «note de la page 163» nos faz levantar a hipótese de que ela é realmente endereçada a Lacroix, cujo livro veio à luz em 1799. A edição de 1807, em que já se encontra a nota da p. 163 em questão, é a 7ª, « revue et corrigée». A observação da nota é a seguinte:

> Cette démonstration très-simple paraît avoir été trouvée en premier lieu par M. Ampère, alors professeur à l'École centrale de Lyon.

Já na edição de 1811, a 9ª, encontramos, após a demonstração apresentada por Lacroix e, pelo menos até a edição de 1930, a 16ª, agora em nota da página 169, a seguinte observação:

> Cette démonstration m'a été communiquée en 1803, par M. Fournier jeune; mais M. Ampère, alors professeur à l'École centrale de Lyon, en avait déjà trouvé, de son cotê, le príncipe.

O encadeamento das datas e das citações mostra convincentemente, acreditamos, que uma demonstração direta de XI.28 foi encontrada independentemente por Ampère e por Fournier. Infelizmente, não foi possível, ainda, localizar a «mémoire» de Ampère apresentado à Academia de Lyon. Além disso, as datas mencionadas permitem levantar a hipótese de que a carta de Ampère a Lacroix é de data bem anterior à que lhe é atribuída por De Launay.

Na citada carta, Ampère afirma que Fournier «achou a demonstração da nota da p. 163». O que é conhecido sobre Fournier? Este autor, do qual não conseguimos ainda dados biográficos mais completos, foi examinador das escolas de Marinha. Publicou, além de vários livros destinados às escolas de formação de oficiais da marinha e de práticos de cabotagem, *Élémens de géométrie* (Brest, Lefournier et Depériers, 1829).

Resumindo o exposto, vemos que XI.28, demonstrada incompletamente por Euclides e alguns de seus mais importantes editores, como Clavius e Simson, entre outros, tem uma demonstração correta, feita por Manoel de Campos, em 1735, e que apresentaremos neste trabalho. Em seguida, no final do século XVIII, Legendre dá uma segunda demonstração correta, dentro do contexto de sua teoria dos poliedros simétricos. Lacroix indica como fazer uma demonstração direta, sem utilizar a teoria dos sólidos simétricos, atribuindo-a a Ampère. Este, por sua vez, defende seu direito à prioridade da demonstração, mas, ao mesmo tempo, afirma que Fournier a encontrou.

Manoel de Campos e o Colégio de Santo Antão

Segundo Francisco Rodrigues, [1931-1950], os jesuítas se estabeleceram em Portugal convidados por D. João III[5]. lnácio de Loiola enviou para Portugal, em 1540, dois companheiros, um dos quais fundou a Província Jesuíta de Portugal, em 1546 [RODRIGUES, 1931-1950, vol. II, pp. 284-287]. Sua primeira comunidade estabeleceu-se na casa de Santo Antão em Lisboa, na qual, posteriormente, funcionou o Colégio de Santo Antão, construído de 1579 a 1593, e que chegou a contar com aproximadamente 400 alunos [SERRÃO, 1987, p. 468]. Em 1759, os Jesuítas foram expulsos de Portugal pelo Marquês de Pombal, e o Colégio de Santo Antão foi fechado.

Manoel de Campos[6] (Lisboa, 1681 - 26 de novembro de 1758) morreu quinze dias antes da prisão dos jesuítas ordenada pelo Marquês de Pombal [RODRIGUES, 1931-1951, vol. VI, p. 413]. Foi um dos primeiros professores da Academia Real de História Portuguesa. Em 1721, por ordem do rei, Manoel de Campos viajou para Roma, onde permaneceu até 1728, ano em que iniciou seu regresso a Portugal. Ao passar por Madrid, o provincial da ordem o convidou para ser professor da cadeira de Matemática. Ele foi então nomeado Cosmógrafo-mor pelo rei de Castela. Campos permaneceu em Madrid durante quatro anos, voltando a Portugal em 1734. Em Lisboa, retomou os seus trabalhos na cadeira de Matemática do Colégio de Santo Antão e na Academia Real de História Portuguesa. Baldini, [2004, pp 382-465], em sua lista dos jesuítas professores de Matemática em Portugal (Coimbra, Évora e Lisboa), declara que Manoel de Campos foi professor no Colégio de Santo Antão em 1719 e 1720 e de 1733 [sic] a 1742[7].

As avaliações sobre a qualidade da Matemática dos Jesuítas em Portugal são controversas. Stockler [1819, nota 34, p. 59], afirma que

> (...) Nos mesmos collegios dos Padres Jesuítas, a cujo cargo estavam os estudos públicos, cujas casas eram naquelle tempo veneradas como templos e azilo das sciencias, esta [a Matemática] se achava relegada a pouco mais do que os conhecimentos puramente elementares. As obras do Padre Manoel de Campos e do Padre Ignácio Monteiro, são as melhores que neste gênero sahiram d'aquella sociedade, no tempo d'El Rei Dom João V, e nos primeiros anos do reinado do Senhor Dom João, são a prova mais decisiva d'esta verdade.

Por outro lado, Sarmento [1737] afirma:

> Bem podes agradecer, oh! leitor benigno, ao grande talento e excelente gênio do R. P. Manoel de Campos, digno religioso da Companhia, o haver lançado os primeiros fundamentos a esta mudança e animado numa tão louvável empresa, com os seus Elementos de Geometria, que fez imprimir na nossa língua portuguesa, pois não só, depois de instruído neles como seu discípulo, te deixa qualificado para entrares na Filosofia Newtoniana a fazer o teu progresso, mas com a mesma obra te convence e manifesta que em tudo se pode falar na nossa língua, e que é da maior vantagem a qualquer nação, por mais difícil e abstrusa que seja, o escrever e ensinar toda a casta de Ciência na língua natural e própria.

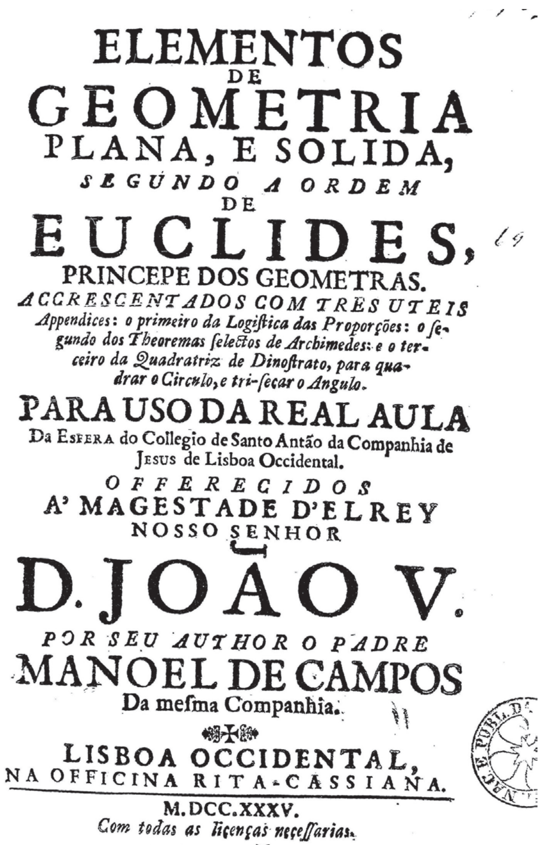
Os superiores dos jesuítas se preocuparam, repetidamente, com o estado da Matemática nos colégios da Companhia em Portugal, sem conseguir realmente melhorar a situação, a qual parece ter sido bastante séria de 1590 a 1692. Então, T. González, o superior geral dos jesuítas tomou, com sucesso, medidas fortes para resolver o problema[8,9].

Manoel de Campos faz parte da lista de professores da «aula da esfera» do Colégio de Santo Antão, apresentada por Baldini [2004, pp. 384-465]. Segundo este autor [2004, p. 307], «The S. Antão chair [Aula da Esfera] was considered a second level position compared with that of philosophy in the same college (…)». Ainda no mesmo trabalho [2004, p. 295], ele comenta que:

> Jesuit education in Portugal was not backward in all sectors of science. From the 16th century, nautical science was taught in the Aula da esfera, connected with the Lisbon Jesuit school, S. Antão, at a good level; (...) Moreover, L. de Albuquerque's assertion that until about 1650 lessons in the Aula dealt with navigation theory and some elementary astronomy and geography, not with geometry, and until 1700 not with arithmetic, let alone algebra or trigonometry (an assertion repeated by others, although inherently improbable), was the result of an incomplete knowledge of the manuscripts, their authors and their chronology.

Em 1735 Manoel de Campos publicou seu *Elementos de Geometria Plana*, *e Sólida*, *segundo a ordem de Euclides*, *Príncipe dos Geômetras*. Dois anos depois, em 1737, publicou seu *Trigonometria plana*, *e esférica*, *para uso da Real Aula da Esfera do Collegio de Santo Antão*[10,11]. Seu livro de Geometria não tem recebido a atenção que merece. Pesquisa em curso dos autores deste artigo visa a determinar em que Manoel de Campos se afastou de Tacquet, ou seja, qual sua originalidade.

O fato de tanto o livro de Manoel de Campos quanto o de Stafford não terem sido publicados em latim, explica-se facilmente. Segundo Baldini [2004, pp. 302-303], a aula da esfera não fazia parte do currículo regular do Colégio de Santo Antão: ela não se destinava a alunos regulares do Colégio, quer clérigos quer leigos, mas a pessoas "in search of some training in cosmography and navigation".



ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
PLANA, E SOLIDA,
SEGUNDO A ORDEM
DE
EUCLIDES,
PRINCEPE DOS GEOMETRAS.
ACCRESCENTADOS COM TRES UTEIS Appendices: o primeiro da Logiſtica das Proporções: o ſegundo dos Theoremas ſelectos de Archimedes: e o terceiro da Quadratriz de Dinoſtrato, para quadrar o Circulo, e tri-ſecar o Angulo.
PARA USO DA REAL AULA
Da Esfera do Collegio de Santo Antão da Companhia de Jesus de Lisboa Occidental.
OFFERECIDOS
A' MAGESTADE D'ELREY
NOSSO SENHOR
D. JOÃO V.
POR SEU AUTHOR O PADRE
MANOEL DE CAMPOS
Da meſma Companhia.
LISBOA OCCIDENTAL,
NA OFFICINA RITA-CASSIANA.
M.DCC.XXXV.
Com todas as licenças neceſſarias.
1735

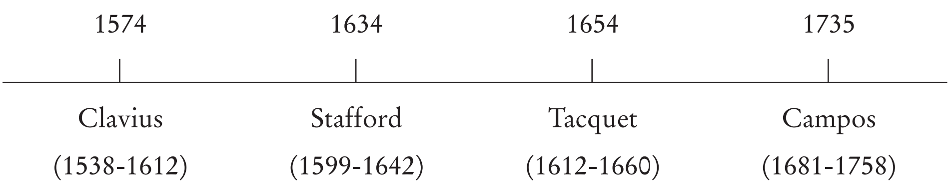
Folha de rosto dos Elementos de Geometria do Pe. Manoel de Campos

No *Prólogo ao leitor*, Manoel de Campos expõe as razões que o fizeram escrever o livro:

> Sair neste tempo à luz com Elementos de Euclides, bem se devia ver, que mais há querer servir ao público do que querer ser autor. Tem-se estampado tantas vezes esta obra, que não digo só não há nação; senão que não há universidade, nem estudo público, que os não tenha próprios para o uso das

> suas aulas; porém por isso mesmo experimentarão os mestres desta uma grande penúria, e maior embaraço: penúria, porque atendo-se cada um a esta imaginada cópia não os fazem vir de fora, na suposição de que se acharão facilmente: embaraço porque sendo tantos, e tão vários os estilos, e métodos dos autores estrangeiros é impossível regular uma aula com tanta variedade de exemplares.
>
> Esta é a razão porque, deixando outras obras que tenho entre mãos, puz todo o cuidado em estampar, primeiro que todos, esta, que não tem de minha, mais que o trabalho de fazer pública.
>
> Podera estampar segunda vez os Elementos do Padre Stafford, o qual sendo mestre da mesma Aula estampou huns Elementos em língua castelhana, pelo mesmo motivo, que eu tenho agora; porèm quem não sabe, que aquella obra foy feita com muita pressa; e só a fim de accodir promptamente à necessidade em que então se achava a Aula? Os do Padre Tacquet, de que usa ordinariamente a Companhia, são sumamente estimados em todas as Nações, pelo breve, pelo claro, e pelo polido; razão porque se tem estampado muitas vezes, e os tem adoptado para uso seu muitos Estudos públicos: estes mesmos são os que dou à luz com mui pouca alteração; salvo a da lingua, que por servirem a todos, me foy aconselhado, ou mandado, que fosse na Portugueza: todavia não deixei de mudar alguma cousa em algumas Demonstrações (...).

Manoel de Campos insere-se em uma linhagem de matemáticos jesuítas, dos quais convém mencionar, no contexto deste artigo, Clavius, Stafford[12] e Tacquet. Na ilustração a seguir, mostram-se os períodos em que estes matemáticos viveram e, acima da linha contínua, a data em que publicaram suas obras.



No que diz respeito a XI.28, Clavius não comenta o erro de Euclides, e repetiu, essencialmente, a demonstração que se encontra nos *Elementos*. Stafford repetiu sua prova. Tacquet apresenta uma demonstração errônea. O mérito de Manoel de Campos foi ter percebido os encaminhamentos errados dados por seus antecessores e ter apresentado uma demonstração correta.

Como afirmado pelo próprio Manoel de Campos, ele se baseou em Tacquet. No caso da proposição XI.28, a afirmativa de Manoel de Campos transcrita acima «(...) todavia não deixei de mudar alguma cousa em algumas Demonstrações (...)» é por demais modesta. Ele se afasta definitivamente de Tacquet, e propõe uma demonstração correta, o que parece ter sido feito mais tarde independentemente por Ampère, e seguramente por Legendre, Fournier e Lacroix.

A demonstração da Proposição XI.28 feita por Manoel de Campos

Apresentamos a seguir a demonstração de Manoel de Campos para XI.28.

198 *ELEMENTOS*

COROLLARIO.

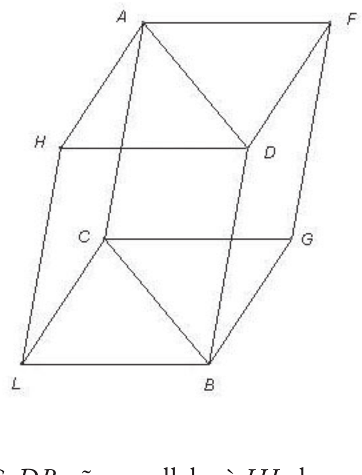
Fig. 6. e 7. A Secção do prisma parallela â base he igual, e semelhante â mesma base; ou tambem ao plano opposto.

PROPOSIÇÃO XXVI. e XXVII.

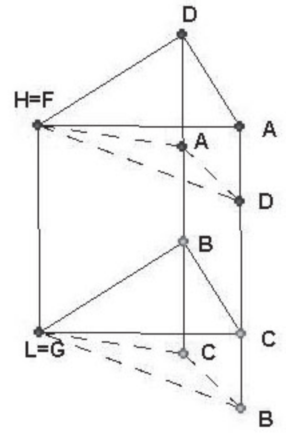
São superfluas.

PROPOSIÇÃO XXVIII. *Theor.*

Fig. 29. *O plano que passa pelos diametros AD, CB, de quaesquer planos oppostos de hum parallelipipedo HG, divide o ditto parallelipipedo em 2. prismas iguaes.*



Consta, da 24. que *AC*, *DB*, são parallelas à *HL*: logo são parallelas entre si (9.) e estão no mesmo plano com as diagonaes *AD*, *CB*. Provo agora que o ditto plano corta o parallelipipedo *HG*, em 2. prismas iguaes. Primeiramente, se o parallelipipedo he recto, imagine-se o prisma *ADG*, dentro do prisma *ADL*; e que cahe o ponto *F*, sobre o ponto *H*; e *G*, sobre *L*: he evidente, que sendo a inclinação dos planos *HC*, *H*B, igual à dos planos *FB*, *FC*; e que sendo elles respectivamente iguaes; como tambem todos os 4. triangulos *AHD*, *AFD*, &c (31.1) se ajustarão os prismas perfeitamente entre si: logo &c.



Se he obliquo; accommodados os prismas do mesmo modo, ficarão formadas arriba, e abaixo 2. pyramides quadriláteras *DDH*, *BBG*; as quaes pelo discurso da Prop. Seguinte, estão comprehendidas de 5. planos, em sitio, em grandeza, e em figura respectivamente iguaes: logo accommodada também huma dentro da outra, se ajustarão perfeitamente entre si: e por conseqüência accrescentando às ditas pyramides o solido intermedio, tambem os prismas serão iguais. Q.E.D».

Essencialmente, Manoel de Campos gira o prisma *ADFCBG* e o coloca de maneira que *FG* coincida com *HL*. Então, os planos das faces *LHAC* e *GFDB* coincidirão, e o mesmo acontecerá com os planos das faces *LHDB* e *GFAC*. Então, a consideração dos prismas triangulares *HADLCB* e *FDAGBC*, que têm uma parte comum, o prisma *LCBHDA*, e duas partes congruentes, as pirâmides de bases quadrangulares e vértices respectivamente *H* e *L*, mostram que os dois prismas têm volumes iguais, logo a proposição está demonstrada.

É interessante observar que, em geral, o livro de Manoel de Campos é mais didático e bem organizado do que o de Tacquet. No entanto, no caso de XI.28, Manoel de Campos afasta-se de uma exposição linear: Ele utiliza parte do raciocínio de XI.29, que garante a igualdade dos volumes dos dois prismas triangulares considerados, HADLCB e FDAGBC. Como XI.29 não emprega XI.28, não se configura um caso de raciocínio circular.

Vale a pena ressaltar, também, que a demonstração de Manoel de Campos é mais simples do que as outras mencionadas, apresentadas no apêndice deste trabalho. Nelas, em geral, é traçado um plano perpendicular a HL (Figura da demonstração de Campos) e usando-se este plano são obtidos prismas congruentes. O caminho escolhido por Manoel de Campos evita esta construção auxiliar.

Equidecomponibilidade de Poliedros

É possível decompor duas figuras de mesma medida (área ou volume) usando as mesmas peças? Esta pergunta está relacionada com o terceiro dos vinte e três famosos problemas propostos por Hilbert em 1900, no segundo congresso internacional de matemáticos, em Paris. Hilbert explicou que já tinha sido demonstrado que se dois polígonos têm a mesma área, pode-se recortar um deles em um número finito de pedaços e rearrumá-los para obter o outro polígono. Exprimimos isso dizendo que os dois polígonos são equidecomponíveis.

No século XIX procurou-se compreender mais cuidadosamente a relação entre igualdade de áreas ou volumes e equidecomponibilidade [Boltianskii 1963; 1978]. F. Bolyai em 1832 e Gerwien, oficial prussiano e matemático amador, em 1833, mostraram independentemente que dois polígonos com mesma área são equidecomponíveis. Claramente, a equidecomponibilidade de figuras planas ou de sólidos geométricos está associada ao problema de dissecções dos mesmos [FREDERICKSON, 2002].

Legendre em uma nota de seus *Éléments de Géométrie* [1794], já havia demonstrado que dois poliedros simétricos são equidecomponíveis com partes que têm a mesma orientação. Hill, professor na Universidade de Londres, fornece, em 1895, exemplos de tetraedros equidecomponíveis com um cubo. Bricard, professor de Matemática em Paris, fornece em 1896 uma condição para que dois poliedros de mesmo volume sejam equidecomponíveis, mas sua demonstração é incompleta. Max Dehn, aluno de Hilbert, prova, em 1900, poucos meses após o congresso de Paris, que existem poliedros com o mesmo volume que não são equidecomponíveis. Em particular, Dehn mostra que um tetraedro regular e um cubo, ambos com o mesmo volume, não podem ser equidecomponiveis. Hadwiger, na década de 1950, simplificou a demonstração de Dehn, empregando o chamado invariante de Dehn, que é igual para poliedros equidecomponíveis. Ora, a decomposição de um prisma em três pirâmides pode fazer surgir pirâmides de mesmo volume, mas com invariantes de Dehn diferentes. Em 1965 o matemático suíço J. P. Sydler consegue, enfim, provar que as condições de Dehn são necessárias e suficientes para que dois poliedros de mesmo volume sejam equidecomponíveis [BÜHLER & GRÉGOIRE, 1991].

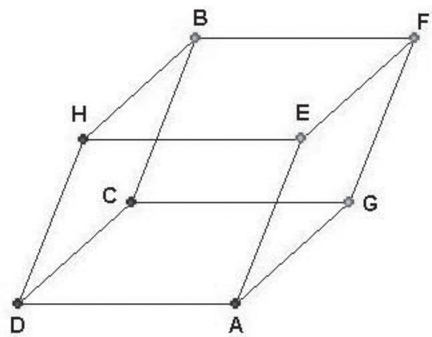
APÊNDICE

ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES DE XI.28

Apresentamos neste apêndice as demonstrações de XI.28 feitas por Euclides, conforme a edição de Heath [1956], Clavius, Stafford, Tacquet, Simson, Simpson, Legendre, Lacroix e Fournier. As de Simpson e de Legendre são comentadas por serem de tipos nitidamente diferentes das outras.

1. Demonstração de Euclides, segundo Heath [1956, III, p. 330]

If a parallelepipedal solid is cut by a plane through the diagonals of the opposite planes, then the solid is bisected by the plane.



For let the parallelepipedal solid *AB* be cut by the plane *CDEF* through the diagonals *CF* and *DE* of opposite planes;

I say that the solid *AB* is bisected by the plane *CDEF.*

For, since the triangle *CGF* equals the triangle *CFB,* [I.34]

and *ADE* equals *DEH,*

while the parallelogram *CA* equals the parallelogram *EB,* for they are opposite, and *GE* equals *CH,*

therefore the prism contained by the two triangles *CGF* and *ADE* and the three parallelograms *GE, AC,* and *CE* is also equal to the prism contained by the two triangles *CFB* and *DEH* and the three parallelograms *CH, BE,* and *CE*;

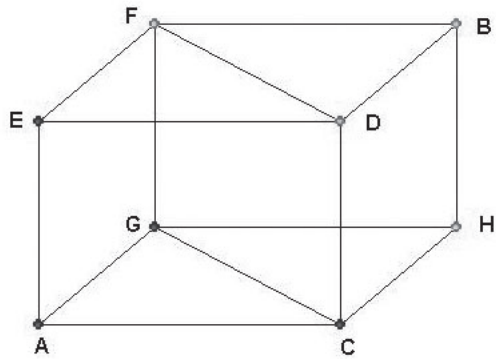
for they are contained by planes equal both in multitude and in magnitude. [XI. Def.10]

Hence the whole solid *AB* is bisected by the plane *CDEF.*

Q. E. D.

2. Demonstração de Clavius [1589, p. 501]

Theor. 23. Propos. 28. SI solidum parallelepipedum plano secetur per diagonios aduersorum planorum: Bisariam secabitur solidum ab ipso plano.

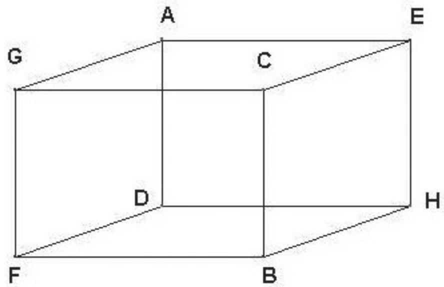


Sit parallelepipedum *AB*, inquo plana opposita sint *AH*, *EB*, quorum diagonii, seu diametri, sint rectae lineae *CG*, *DF*. Quoniam igitur utraque *CD*, *GF*, parallela est, [a] & aequalis ipsi *AE*, cum sint parallelogramma *HE GE*; [b] erunt & interse parallelae, & aequales *CD, GF*, [c] Ac proinde, quae ipsas coniungunt *CG, DF*,parallelae erunt & aequales, ideoque in uno plano. Dico planum, quod per *CG*, *DF*, ducitur, secare bisariam parallelepipedum *AB*. [d] Cum enim plana *AH*, *EB*, sint parallelograma aequalia, & similia; erunt dimidia, nimirum triangula *AGC*, *GCH*; *EFD*, *FDB*, aequalia inter se: sunt autem & circa ângulos equales *GAC*, *CHG*, *FED*, *DBF*, proportionalia. [e] Igitur similia quoque erunt dicta triangula. [f] Cum igitur & parallelogrammum *AF*, aequale sit & símile parallelogrammo *CB*; & *AD*, ipsi *GB*; & *CF*, commune: Erunt duo triangula *AGC*, *EFD*, & parallelogramma *AF*, *AD*, *CF*, prismatis *ACGFED*, aequalia & similia duobus triangulis *HCG BDF* & parallelogrammis *CB*, *BG*, *CF*, prismatis *HGCDBF*; propptereaq; prismata aequalia erunt, ex defi. 10 huius lib. Quae cum componant parallelepipedum *AB*, sectumerit parallelepipedum *AB*, bisariam. Itaque si solidum parallelepipedum plano sectur, &c. Quod erat demonstrandum

3. Demonstração de Stafford [1634, p. 179]

Propos. 28. Theor. 23.

El plano que corta el paralelepipedo, GH, por, AC, DB, Diagonios de planos oppuestos, GE, FH; le parte por el medio.

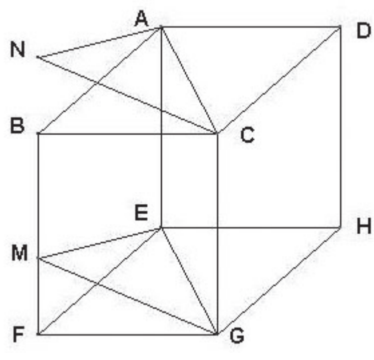


Porque *GE*, *FH*, son paralelogramos iguales y semejantes, pr 24, II. Partidos por los medios por los diagonios *AC*, *DB*, pr 34, I. Y el paralelogramo AF es igual con *EB*; *AH* con *GB*, pr. 24, y *AB* comun. Luego los triangulos *ACG*, *DBF*; cõ los paralelogramos *AF*, *GB*, *AB*, del prisma *ACGDBF*: igualan los triãngulos *EAC*. *HDB*, con los paralelogramos *EB*, *ED*, *AB*, del prisma *EACHDB*. Luego los prismas son iguales, d. 10.II. Pero cõponen el paralelepipedo *GH*, como sus partes todas. Luego el plano, etc.

4. Demonstração de Tacquet [1721, pp. 200-201]

Propositio XXVIII

Planum per adversorum diametros (AC, EG) transiens parallelepipedum secat in duo aequalia prismata.



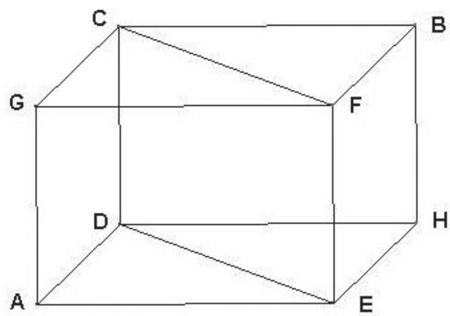
Quoniam *a BG*, *BE* sunt parallelogramma, *CG*,*AE* aequidistant eidem *BF*. Ergo & *b* inter se sunt parallelae, *AC* proinde in uno sunt plano. Ergo rectae *AC*, *EG c* in uno sunt plano. Jam vero planum per illas ductum secare parallelepipedum in duo prismata aequalia, sic ostendo. Intelligatur prisma *AEGCDH* supra planum suum *EACG* ita constitui, ut anguli *D*, *H*, vergant ad angulos *B*, *F*. Manifestum est tum adhuc sore inter parallela plana *BADC*, *FEHG*. Tum vero necesse est, ut *D* cadat in *B* & *H* in *F*. Cadat enim *D* extra *B*, si sieri potet, in *N*. Angulus *BAC* aequatur *d* ângulo *DCA*. Sed *DCA* aequatur *NAC* (est enim unus, idemque angulus). Ergo *BAC*, & *NAC* aequalus sunt, quod est absurdum. Ergo *D* incidit in *B*, & pari de causa *H* in *F*. Ergo prisma *AEGCDH* congruit pirsmati *ACGEFB*, *AC* proinde e aequalia sunt.

5. Demonstração de Simson [1756, pp. 259-260]

Prop XXVIII. Theor.

Si solidum parallepipedum plano fecetur per diagonales oppositorum planorum, ab ipso plano bisariam secatibur.

Sit enim solidum parallelepipedum AB, et oppositorum planorum AH, GB diagonales sint DE, CF quae sc. ductae sunt inter aequales angulos parallelogrammorum AH,GB. et quoniam utraque CD, FE parallela est ipsi GA, non in eodem cum ipsa plano, erunt CD, FE inter se parallelae[a]; quare diagonales CF, DE sunt in plano in quo sunt hae parallelae; et inter se parallelae erunt[b]. Dico igitur solidum AB a plano CDEF bisariam secari.



Quoniam enim aequale est CGF triangulum triangulo CBF, triangulum vero DAE triangulo DHE[c]; esta utem et CA parallelogrammum parallelogrammo BE aequale[d], oppositum enim est; erit prisma contentum duobus triangulis CGF, DAE, et tribus parallelogrammis CA,GE, EC aequale prismati quod continetur duobus triangulis CBF, DHE, et tribus parallelogrammis BE,CH, EC[e]; et enim planis similibus, multitudine et magnitudine aequalibus, et similiter positis continentur, et nullus ex ipsorum angulis solidis continetur pluribus quam tribus angulis planis. Ergo totum AB solidum a plano CDEF bisariam secatur. Q.E.D.

6. Demonstração de Simpson [1747]

Na primeira edição de seu livro (1747), Simpson introduz o postulado que veio a receber em alguns livros didáticos nacionais o nome de «Princípio de Cavalieri» (p. 121):

Postulatum

If two Solids of the same Altitude be CUT by Planes parallel to their Bases, and the Sections, at all equal Distances from the Bases, be either equal, or in a constant Ratio, the Solids themselves will, accordingly, be either equal or in the same constant Ratio.

Note que este postulado contém implícita uma hipótese de continuidade bastante forte, tanto que ele se torna um teorema na presença do Postulado de Dedekind. Uma vez admitido, o princípio de Cavalieri faz com que proposições como XI. 28 sejam evidentes. As demonstrações de Manoel de Campos e Legendre, no entanto, nos mostram que XI. 28 é um resultado mais básico, que não depende de hipóteses de continuidade. Isto parece estar pelo menos no inconsciente da comunidade da época.

Por uma razão ou por outra, Simpson é levado a modificar sua exposição já na segunda edição de sua obra (SIMPSON [1760]). É interessante observar que, ao repensar o assunto, Simpson demonstra ter dúvidas até sobre como deveria tratar a congruência no espaço. O cuidado o leva a um postulado pouco usual, enunciado para prismas retos, na página 131:

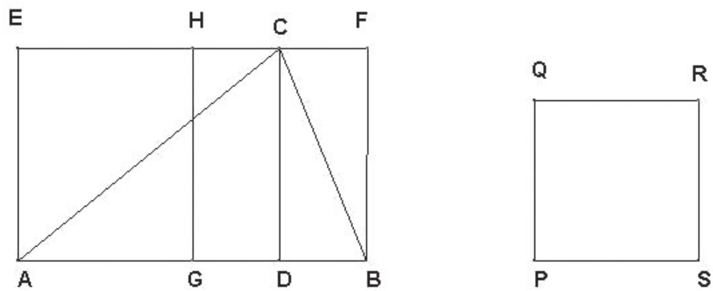
An AXIOM

Upright prisms (AabcCBA, DdefFED) of the same altitude, standing upon bases (ABC, DEF) equal and like to each other, are themselves equal.

Posteriormente, Legendre basearia toda a sua teoria de congruência no espaço sobre resultados relativos a triedros e a movimentos rígidos (Livro V, proposições XXIII a XXV). Simpson, porém, apesar de seu evidente cuidado, recai no mesmo erro de seu contemporâneo Simson, ao repetir (inadvertidamente?) a omissão de Euclides, ao tentar provar seu teorema 19 (Simpson, 1760, pg. 146):

Theorem XIX

If, on equal bases (ABC,PQRS), na upright triangular prism, and a rectangular parallelepipedon be erected, of the same altitude; the two solids, themselves, will be equal.



Let *CD* be perpendicular to *AB*, and let the rectangles *ADCE*, *BDCF*; be completed; also let *GH* be drawn parallel to *AE*, bisecting *AB* in *G*; so shall *AGHE*=1⁄2 *ABFE*[b]=*ACB*[c]=*PQRS*[d]. Now, the two prisms on *ADC* and *BDC*, into which, *that* on *ABC* may be divided[e], will be respectively equal to two others, on the equal and similar[f] bases *AEC* and *BFC*[g]: and consequently the prism on *ACB*=half the prism on *AEFB*[h]=half the two prisms on *AGHE* and *BGHF*[j] = the prism on *AGHE* = the prism on [k]*PQRS**.

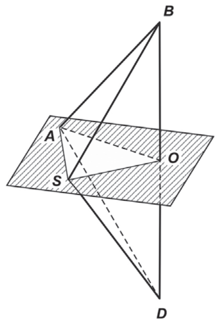
O erro de Simpson está em assumir que um paralelepípedo de base retangular é decomposto em dois prismas triangulares congruentes. O erro se repete nas edições posteriores da obra.

7. Demonstração de Legendre [1794, p. 176; 1809, 2009, p. 190]

A proposição XI. 28 de Euclides encontra-se no texto de Legendre como Proposição VI.VI (1794, p 176; 1809, 2009, p. 190). Legendre demonstra, inicialmente, que o plano diagonal proposto por Euclides dissecta o paralelepípedo em dois prismas triangulares simétricos. Em seguida, a igualdade de volumes segue de uma proposição mais geral: «dois poliedros (convexos) simétricos são iguais em solidez» que, por sua vez, é conseqüência de «duas pirâmides simétricas são iguais em solidez» (Nota VII, Teorema I). Legendre usa três lemas, que transcrevemos a seguir, para provar este teorema (1809, 2009, pp. 319-322):

Lema I

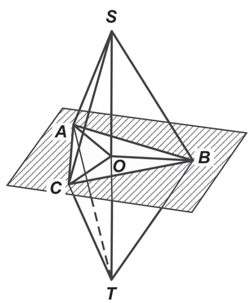
Seja ΔAOS um triângulo isósceles, no qual AO = OS. Se, pelo ponto O, tirarmos a reta BOD, perpendicular ao plano AOS, e tomarmos, de uma e outra parte do plano, as distâncias iguais OB e OD, digo que as pirâmides DAOS, BAOS, que têm por base comum ΔAOS, e por vértices os pontos B e D, são não apenas simétricas, como resulta da construção, mas podem ser sobrepostas por causa da base isósceles, sendo perfeitamente iguais.



Com efeito, é fácil ver que a pirâmide AOSB ou (para a distinguir melhor) A'OS'B, pode ser posta exatamente sobre a pirâmide AOSD. Primeiramente, o triângulo isósceles ΔS'AO' pode ser posto sobre o seu igual AOS, de maneira que o ponto S' recaia sobre A, e o ponto A' sobre S. Nesta situação, a perpendicular OB cobrirá exatamente a sua igual OD, e assim o ponto B cairá em D. Logo as duas pirâmides se confundirão em uma só, e portanto são iguais.

Lema II

Seja ΔABC um triângulo qualquer, e seja O o centro do círculo circunscrito a esse triângulo, de sorte que tenhamos OB = OC = OA. Se, do ponto O, levantarmos ao plano do triângulo a perpendicular TOS, e tomarmos de uma e outra parte distâncias iguais OS e OT, digo que as duas pirâmides simétricas SABC e TABC terão solidezes iguais.



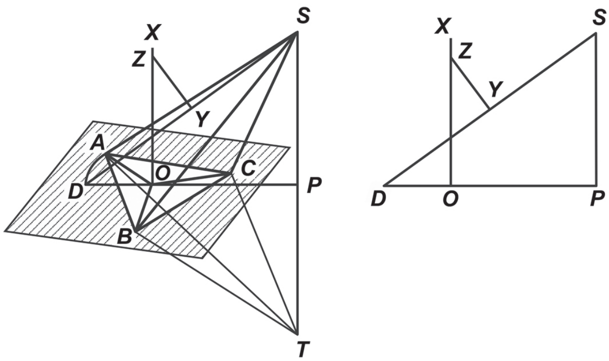
Porque, segundo o lema precedente, as pirâmides AOBT, BOCT, AOCT são iguais respectivamente às pirâmides AOBS, BOCS, AOCS. Logo a pirâmide ABCT, que é a soma das três primeiras, é igual em solidez à pirâmide ABCS, que é a soma das outras três.

Escólio: Se o ponto O, centro do círculo circunscrito, estivesse fora do triângulo ΔABC, é fácil ver que a conclusão seria sempre a mesma.

Lema III

Toda pirâmide triangular pode ser inscrita em uma esfera.

Seja ΔABC a base da pirâmide proposta, S o seu vértice e SP a altura. Seja O o centro do círculo circunscrito ao triângulo ΔABC. Se, pelo ponto O, levantarmos a perpendicular indefinida OX, cada ponto de OX estará a igual distância de A, B e C. Portanto, nos falta encontrar em OX um ponto Z que seja igualmente distante de A e de S. Estando, portanto, esse ponto Z a igual distância dos quatro pontos A, B, C e S, ele será o centro da esfera circunscrita à pirâmide. Ora, a solução desse problema é fácil de executar sobre um plano.



Debaixo de um ângulo reto, façam-se as linhas SP e OP, iguais às linhas do mesmo nome na figura sólida. Prolongue-se PO uma quantidade OD igual ao raio AO do círculo circunscrito. Tire-se DS e sobre o meio de DS levante-se a perpendicular indefinida YZ.

Digo que YZ encontrará a perpendicular OX no ponto procurado Z, de maneira que ZD ou ZS será o raio da esfera circunscrita, e ZO a distância do seu centro ao plano ABC.

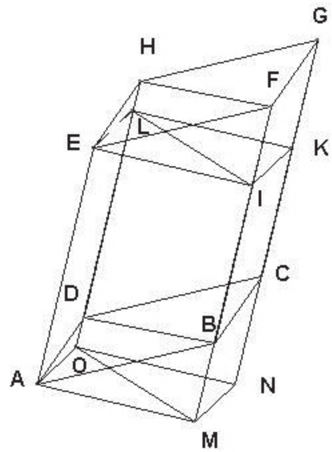
Com efeito, temos, por construção, ZD = ZS. Ora, como OD = OA, temos ZD = ZA = ZB = ZC, logo as quatro distâncias ZS, ZA, ZB e ZC são iguais, e Z é o centro da esfera circunscrita.

Corolário 1: A reta YZ, perpendicular a DS, e a reta OX, perpendicular a DP, se encontram sempre; porque fazem entre si um ângulo igual a ∠SDP, e não podem se encontrar em mais de um ponto. Logo é sempre possível circunscrever uma esfera a uma pirâmide triangular dada, e não pode se circunscrever mais de uma.

Corolário 2: A mesma construção plana, pela qual se determina o raio e o centro da esfera circunscrita à pirâmide SABC, servirá para encontrar o raio e o centro da *esfera circunscrita à pirâmide TABC, simétrica de ABC.* Porque os valores de SP, OP, DO são os mesmos em uma e outra parte. Logo as esferas circunscritas às duas pirâmides são iguais, e os seus centros estão igualmente distantes dos planos das faces iguais.

8. Demonstração de Lacroix [1808, pp. 163-164]

(...) et que par conséquent ces deux polyèdres, compris dans la classe de ceux qui ne peuvent coïncider (225) doivent renfermer le même espace: Le volume de chacun d'eux sera donc la moitié de celui du parallélépipède qu'ils composent(*).



(*) Si on ne regarde pas cette égalité comme évidente, on la prouvera ainsi qu'il suit: Par les extrémités *A*, *E*, d'une arête du parallélépipède *BH*, fig.133, on mènera des plans perpendiculaires à cette arête, et on formera ainsi le parallélépipède *NE*, dont les arêtes sont perpendiculaires sur la base *AMNO*, et de plus équivalent au parallélépipède *BH*, puisque leurs base *ALE* et *ADHE* sont équivalentes, et qu'ils ont même hauteur. Mais le plan *DBHF* partage le parallélépipède en deux prismes triangulaires droits *AOMELI*, *MNOIKL*, évidemment égaux; car leurs faces sont égales, semblablement disposées, et leurs angles dièdres correspondans sont égaux; chacun de ces prismes est donc la moitié du parallélépipède *NE*, et par conséquent celle du parallélépipède *BH*. Cela posé, il est facile de voir que les pyramides quadrangulaires *AMBDO* et *EIFHL*, sont égales comme ayant, chacune à chacune, toutes leurs faces égales, semblablement disposées et leurs angles dièdres correspondans égaux, et que si on les retranche alternativement du corps *AMOEFH*, les restes seront les deux prismes triangulaires *AMELI*, *ABDEFH*: ces deux prismes sont donc équivalens; or le premier étant la moitié du parallélépipède BH, il en sera de même du second.

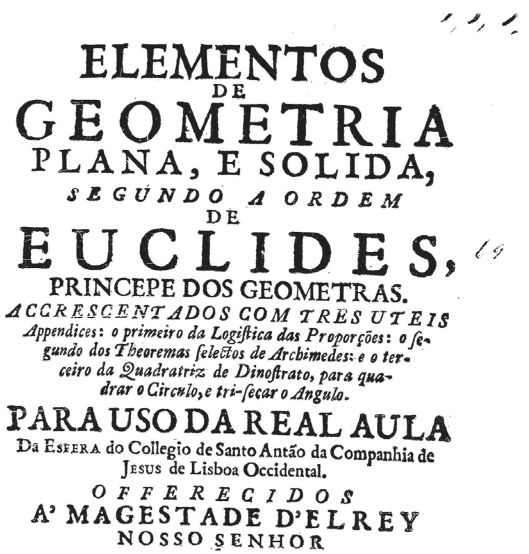
Cette démonstration très-simple paraît avoir été trouvée en premier lieu par M. Ampère, alors professeur à l'École centrale de Lyon.

9. Demonstração de Fournier [1829, p. 273]

401. *Si par deux arêtes diagonalement opposées BF et DH d'un parallélipipède quelconque AG on fait passer un plan, ce parallélipipède sera décomposé en deux prismes triangulaires équivalens ABDEFH et BCDFHG.*

Les triangles *ABD* et *EFH* sont égaux, comme moitiés de parallélogrammes égaux *ABCD* et *EFGH*, et il en est de même des triangles *BDC* et *FHG*. Les faces *AF* et *AH* sont des parallélogrammes, ainsi que les faces *BG* et *CH*, et il en est de même de la face *BH* qui est commune aux deux solides partiels *ABDEFH* et *BDCFHG*. Donc, 1.º, ces deux solides sont des prismes triangulaires ayant une face commune *BH*.

Si par les points *D* et *H* on mène les plans *DMN* et HIK perpendiculaires à l'arête *EA*, et qui rencontrent les arêtes *BF* et *CG* en *N, O*, *K* et *L*, on aura un solide *DMNOHIKL*, qui sera un parallélipipède droit, et qui sera décomposé en deux prismes triangulaires droits *DMNHIK* et *DNOHKL* égaux entre eux (360). Le prisme triangulaire droit *DMNHIK* sera équivalent au prisme triangulaires oblique *ABDEFH* (400), et le prisme triangulaires droit *DNOHKL* sera équivalent au prisme triangulaire oblique *BCDFGH*, donc les deux prismes *ABDEFH* et *BCDFGH* seront aussi équivalens.


ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
PLANA, E SOLIDA,
SEGUNDO A ORDEM
DE
EUCLIDES,
PRINCEPE DOS GEOMETRAS.
ACCRESCENTADOS COM TRES UTEIS Appendices: o primeiro da Logistica das Proporções: o segundo dos Theoremas selectos de Archimedes: e o terceiro da Quadratriz de Dinostrato, para quadrar o Circulo, e tri-secar o Angulo.
PARA USO DA REAL AULA
Da Esfera do Collegio de Santo Antão da Companhia de Jesus de Lisboa Occidental.
OFFERECIDOS
A' MAGESTADE D'ELREY
NOSSO SENHOR

Notas

1 Gostaríamos de agradecer aos revisores deste artigo, os quais contribuíram para torná-lo mais claro.

2 Ver [LACROIX, 1808, nota de rodapé à Proposição 250, p. 163]: «Cette démonstration très-simples paraît avoir été trouvée en premier lieu par M. Ampère, alors professeur à l'École centrale de Lyon».

3 É o caso, por exemplo, de Thomas Simpson [SIMPSON, 1747] (nota dos autores deste artigo).

4 Agradecemos a Gérard Grimberg a localização desta carta de Ampère.

5 Cognominado *O Piedoso*, foi o 15º rei de Portugal. Viveu de 1502 a 1557 e reinou de 1521 a 1557.

6 Dados bibliográficos mais completos de Manoel de Campos se encontram em (LORETO junior, 2001).

7 Observe-se a divergência de datas entre Rodrigues e Baldini.

8 Ver BALDINI [2004, pp. 302-306] para uma discussão bem completa sobre o assunto.

9 Thyrsus González de Santalla, (18 de janeiro de 1624, Arganza, Espanha - 27 de outubro de 1705, Roma) foi eleito, em 1687, o 13º Superior Geral dos Jesuítas.

10 Alguns autores portugueses afirmam que os *Elementos de Geometria* foram publicados em 1737. Como se pode ver pela página de rosto da obra, trata-se obviamente de um engano.

11 A obra *Trigonometria plana e esférica com o cânon trigonométrico, linear e logarithmico* foi estudada na dissertação de mestrado de LORETO Júnior [2001].

12 O livro de Sttafford, *Elementos Mathematicos* [STAFFORD, 1634], embora publicado em Lisboa está escrito em espanhol.

Referências bibliográficas

BALDINI, Ugo (2004) "The teaching of mathematics in the Jesuit colleges of Portugal, from 1640 to Pombal". In: Luis Saraiva e Henrique Leitão (eds.) *The practice of mathematics in Portugal*. Coimbra, Imprensa da Universidade de Coimbra, 293-466.

BELHOSTE, Hugo (1998) «Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques». *Revue d'histoire des mathématiques, 4,* 289- 304.

BOLTIANSKII, Vladimir Grigorevich (1963) *Equivalent and equidecomposable figures*. Boston, MAS; Washington, D.C., Heath & Co.

BOLTIANSKII, Vladimir Grigorevich (1978) *Hilbert's third problem*. Washington, D.C., Winston and Sons.

BÜHLER, M. & GRÉGOIRE, M (1991) «Puzzle et casse-tête». In : *La figure et l'espace*. *Actes du* 8ème *Colloque Inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques*. Lyon, IREM de Lyon, 263-301.

CAMPOS, Manoel de (1735) *Elementos de geometria plana e sólida*. Lisboa, Officina Rita Caciana.

CLAVIUS, Christofer (1589) Euclides elementorum lib. XV. Roma.

DEHN, Max Wilhelm (1900) « Über raumgleiche Polyeder Nachr. » *Königl. Ges. der Wiss. zu Göttingen f. d. Jahr 1900,* 345-354.

DE LAUNAY, L (1936) *Correspondance du Grand Ampère*. Tome II. Paris, Gauthier-Villars, 675-676.

ENRIQUES, Federigo (1956) *Gli elementi dÉuclide e la critica antica e moderna*. Editi da Federigo Enriques, col concorso di diversi collaboratori. Libri XI-XIII. Bologna, Nicola Zanichelli.

FOURNIER, Charles-Félix (1829) *Élémens de géométrie*. Brest, Lefournier et Depériers.

FREDERICKSON, Greg N (2002) *Dissections: plane and fancy*. Cambridge, UK, Cambridge U.P.

GAUSS, Johann Carl Friedrich (1975) "Briefwechsel. Congruenz und Symmetrie". In: *Werke*, vol. 8, 240-249. Hildersheim, Olms Verlag, [Repr. d. Ausg. Berlin 1917-33].

HEATH, Thomas Little (1956) *The thirteen books of Euclid's elements*. New York, Dover, vol. 3.

HON, Giora & Bernard R. GOLDSTEIN (2005) "Legendre's revolution (1794): the definition of symmetry in solid geometry". *Arch. hist. exact sciences*, *59,* 107-155.

LACROIX, Sylvestre François (1807) *Élémens de géométrie à l usage de l'ecole centrale des quatre-nations*. 6éme édition, revue et corrigée. Paris, Courcier.

LACROIX, Sylvestre François (1808) *Élémens de géométrie à l usage de l'ecole centrale des quatre-nations*. 7éme édition, revue et corrigée. Paris, Courcier.

LACROIX, Sylvestre François (1811) *Élémens de géométrie à l usage de l'ecole centrale des quatre-nations*. 9éme édition, revue et corrigée. Paris, Courcier.

LACROIX, Sylvestre François (1819) *Élémens de géométrie à l usage de l'ecole centrale des quatre-nations*. 11éme édition, revue et corrigée. Paris, Courcier.

LACROIX, Sylvestre François (1825) *Élémens de géométrie à l usage de l'ecole centrale des quatre-nations*.13ème édition, revue et corrigée. Paris, Bachelier.

LACROIX, Sylvestre François (1830) *Élémens de géométrie à l usage de l'ecole centrale des quatre-nations*. 16éme édition, revue et corrigée. Bruxelles, H. Remy.

LEGENDRE, Adrien Marie (1794) *Éléments de géométrie*. Paris, Firmin Didot.

LEGENDRE, Adrien Marie (1809; 2009) *Elementos de geometria*. Traduzidos do francês, e dedicados ao Príncipe Regente Nosso Senhor, por Manoel Ferreira de Araújo Guimarães, Capitão do Real Corpo de Engenheiros, Lente de Mathematica na Academia Real dos Guardas-Marinha. Rio de janeiro, Impressão Régia; Editora LIMC, UFRJ.

LORETO Júnior, Armando Pereira (2001) *Uma obra do matemático jesuíta Manoel de Campos para a «Aula da Esfera» do Colégio de Santo Antão*. Dissertação de Mestrado. São Paulo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

MUELLER, Ian (1981) *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*. Boston, MA, MIT Press.

PARANAGUÁ, Francisco Vilela Barbosa, Marquês de (1838) *Elementos de geometria*. Rio de Janeiro, Typographia Austral.

RODRIGUES, F. (1931-1950) *História da Companhia de Jesus na Assistência de Portugal*. Porto, Apostolado da Imprensa, 7 vols.

SCHUBRING, Gert (2001) « Production mathématique, enseignement et communication ». *Revue d'histoire des mathématiques*, *7,* 295-305.

STAFFORD, Ignatio, SJ (1634) *Elementos mathematicos*. Lisboa.

STOCKLER, Francisco da Borja Garção (1819) *Ensaio histórico sobre a origem e progressos das matemáticas em Portugal*. Paris, P. N. Rougeron.

SARMENTO, Jacob de Castro (1737) *A verdadeira theorica das marés*. Londres.

SERRÃO, Joel & A.H. de Oliveira MARQUES (1987) *Nova história de Portugal - Portugal do Renascimento à crise dinástica.* Lisboa, Editorial Presença.

SIMPSON, Thomas (1747) *Elements of plane geometry.* London.

SIMPSON, Thomas (1760) *Elements of plane geometry.* Second edition with large alterations and additions. London.

SIMSON, Robert (1756) *The Elements of Euclid* : *Viz. The First Six Books, Together with the Eleventh and Twelfth*. Glasgow.

TACQUET, Andrea (1721) *Elementa geometriae planae ac solidae quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata*. *In hac nova editione inserta est Trigonometria plana*... Patavium (Pádua).

TACQUET, Andrea & WHISTON, Gulielmus (1741) *Elementa geometriae planae ac solidae quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata quibus accedit trigonometria.* Mediolanum (Milão).