ALGORITMOS ALGEBRAICOS LINEALES EN EL PRIMER LIBRO DE TEXTO (1917) DE JULIO REY PASTOR[1]

Yolima Álvarez Polo
Universidad Distrital F. J. Caldas (Bogotá, Colombia)

Luis Español González
Universidad de La Rioja (Logroño, España)

Resumen

El propósito de este artículo es analizar los algoritmos algebraicos lineales (álgebra lineal de la época) contenidos en el libro de texto universitario *Elementos de Análisis Algebraico*, escrito por Julio Rey Pastor en los años centrales de la segunda década del siglo XX. Estudiaremos la primera edición (1917), pues la temática a considerar no se modificó en las ediciones posteriores. El trabajo pone de manifiesto la modernidad de la obra mediante un análisis comparado con otras dos similares, de A. Capelli y L. Octavio de Toledo respectivamente.

Abstract

The goal of this article is to analyze the linear algebraic algorithms (linear algebra in that time) that are contained in the university textbook *Elementos de Análisis Algebraico*, written by Julio Rey Pastor during the middle years of the second decade of the 20th century. We will study the first edition (1917), since our subject remains unchanged in subsequent editions. This work considers the modernity of the book by means of a comparative analysis with two similar ones, by A. Capelli and L. Octavio de Toledo respectively.

Palabras clave: Análisis algebraico, Determinantes y matrices, Libros de texto universitarios, España, Siglo XX.
Keywords: Algebraic analysis, Determinants and matrices, University textbooks, Spain, 20th century.

Recibido el 14 de febrero de 2011 – Aceptado el 15 de enero de 2012

1. INTRODUCCIÓN

El libro de texto para el primer curso de la Facultad de Ciencias, titulado *Elementos de Análisis Algebraico* [REY PASTOR, 1917] (en lo sucesivo escribiremos simplemente *Elementos*), es la propuesta de su autor[2] para la asignatura Análisis Matemático 1º de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central en Madrid, que comenzó a impartir el curso 1914-15. La obra tiene su origen en unos apuntes litografiados[3] a los que nos referiremos con el término *Resumen* (o en plural si nos referimos también a los apuntes de Análisis Matemático 2º) que encabeza sus títulos. *Elementos* consiste en una reelaboración mejorada y ampliada del primer *Resumen* y del primer capítulo del segundo; pero el contenido algebraico que nos ocupa está en el primero de ellos.

En un artículo reciente [ESPAÑOL *et al*., 2010] ha quedado justificado que los *Resúmenes* de Rey Pastor se ubican en una corriente europea, que se remonta a Euler, de textos de análisis algebraico, entendido éste como el análisis matemático previo a la introducción del cálculo infinitesimal. El contenido esencial de las asignaturas Análisis Matemático 1º y 2º, que surgieron en España en la segunda mitad del siglo XIX, era un análisis algebraico[4] que seguía de cerca la obra *Elementos de Matemáticas* del alemán Baltzer [1879-81], mientras que Rey Pastor tomó inspiración en varios autores de mayor nivel y modernidad, entre los que destaca el italiano Capelli [1909][5]. El propósito de este artículo es particularizar el análisis en el fragmento de *Elementos* dedicado a los algoritmos algebraicos lineales. Aunque *Elementos* tuvo muchas ediciones, estudiaremos la primera de 1917, pues en ella se fija, salvo pequeños detalles, el contenido algebraico objeto de este artículo.

La introducción que el autor escribió para la primera edición de *Elementos* empieza con este párrafo:

> Agotada rápidamente la corta tirada que hicimos del primer tomo de nuestro curso autografiado, en que resumíamos las lecciones explicadas en la Universidad de Madrid, nos hemos creído obligados a corresponder a la benévola acogida del público, abordando la publicación de un tratado de *Análisis algebraico* [REY PASTOR, 1917, p. 3].

Los apuntes fueron un texto rápido para las necesidades de la clase, pero *Elementos* ya era un trabajo más elaborado que merecía el nombre de tratado, como explicaba su autor en la misma introducción:

> Un curso es una selección de cuestiones fundamentales, aunque no constituyan sistema; es una excursión exploradora por el campo de una Ciencia; es como un plano que sirve de preparación y guía para el estudio de los tratados. Un tratado general debe contener, en cambio, una exposición sistemática del organismo de una ciencia; debe ser la cantera de donde puedan extraerse cursos variados [REY PASTOR, 1917, p. 4].

El objetivo que nos proponemos en este artículo es extraer el «curso de álgebra lineal» contenido en *Elementos* y someterlo a un análisis crítico histórico. Hablar de «álgebra lineal» a la altura de la Primera Guerra Mundial es algo anacrónico, ya que dicha expresión pertenece más bien al lenguaje acuñado en los años treinta una vez que el álgebra adoptó su nueva imagen pasando a ser una teoría de las estructuras algebraicas [CORRY, 1996]. Pero para el joven catedrático Rey Pastor, igual que, en general, para los matemáticos de su tiempo, el álgebra tenía su sentido clásico como resolución de las ecuaciones dadas por polinomios. Si el grado de los polinomios no pasa de la unidad se está en el caso lineal, en el cual la teoría se convierte en la resolución de sistemas lineales, que utiliza determinantes.

Rey Pastor asume plenamente el espíritu del tradicional análisis algebraico basado en la introducción de los números por el método genético, ampliación sometida al principio de permanencia de las leyes formales de Hankel[6]. Esto significa que cada sistema de números se construye a partir del anterior y se definen las operaciones del sistema nuevo de modo que extienden las del anterior y conservan sus propiedades básicas (asociativa, conmutativa, distributiva). Este criterio está más bien implícito en las diferentes obras que le precedieron, pero Rey Pastor lo hace explícito, convirtiéndolo en una propuesta programática:

> Puesto que los números son el objeto del análisis algebraico, y los diversos campos numéricos nacen por ampliaciones sucesivas, y cada uno de ellos tiene sus problemas propios, estos sucesivos grados de amplitud del concepto de número señalan la clasificación natural del análisis algebraico, más adecuada para su estudio [REY PASTOR, 1917, p. 4].

En consecuencia, el libro está organizado en cuatro partes, de modo que en cada una de ellas se define un sistema de números, con sus operaciones y propiedades, y se desarrolla la teoría matemática que le corresponde. Las cuatro partes se dedican respectivamente a los números *naturales*, *racionales*, *reales* y *complejos*[7]. El «álgebra» y sus algoritmos finitos están en las dos primeras y el «análisis», con sus algoritmos indefinidos basados en la noción de límite, en la tercera y la cuarta.

Antes de entrar en la materia propiamente dicha, incluiremos en la Sección 2 una somera descripción del diseño metodológico de *Elementos*. La siguiente sección estará dedicada a describir y analizar los algoritmos algebraicos lineales, o temas de álgebra lineal de la época, contenidos en *Elementos*. En la Sección 4 se realizará un análisis comparado de esta obra con dos libros contemporáneos con análogos contenidos y fines docentes. En primer lugar nos fijaremos en la obra *Istituzioni di analisi algebrica* del italiano Capelli [1909], que inspiró a Rey Pastor, y después en las de Octavio de Toledo[8] [1902, 1905, 1916], catedrático veterano asentado en Madrid con el que Rey Pastor compitió enseñando y publicando sobre las mismas materias. Terminaremos exponiendo unas conclusiones que precederán a la lista de las referencias utilizadas.

2. LA ESTRUCTURA DE *ELEMENTOS*

Elementos está escrito en tres niveles, utilizando distintos tamaños de letra y espacios entre líneas, lo que da un carácter cíclico a la obra, preparada para ser asimilada en varias lecturas. El tipo mayor se usa en el cuerpo central del texto, organizado en capítulos divididos en secciones y éstas a su vez en apartados distinguidos por números resaltados en negrita que se suceden de manera continua a lo largo de todo el libro. El autor los utiliza para las citas dentro del texto y como referencia en el índice de materias. Algunos de estos apartados van en tipo menor y en líneas más apretadas, para indicar que se trata de temas complementarios que pueden dejarse para una segunda lectura. Esta estructura está ocasionada por la variedad de estudiantes a los que el autor se dirigía, pues la asignatura Análisis Matemático 1º era cursada por todos los estudiantes de ciencias, no sólo de exactas, a los que el autor consideraba, no obstante, como los destinatarios principales de su obra.

En su afán por proponer a los estudiantes de matemáticas, ya desde el primer curso, temas que pudieran provocar interés y orientar hacia estudios más avanzados, Rey Pastor añadió al cuerpo principal de su libro de texto, al final de los capítulos y en texto apretado, notas y comentarios con remisión a un escogido repertorio de obras para el estudio avanzado de los asuntos propuestos, y también para el conocimiento de su evolución histórica.

Esta estructura, que se repite en obras posteriores, se corresponde con un objetivo general del autor, profundamente involucrado en incrementar la recepción en España de la matemática europea más avanzada, esfuerzo que se inscribe en el proyecto de regeneración nacional y progreso científico liderado en esos años por el filósofo Ortega, al que se sumó un nutrido grupo de artistas e intelectuales de la llamada «generación de 1914». Los universitarios y científicos de esta generación, Rey Pastor entre ellos, recibieron una formación europea a través de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas[9].

En líneas generales, *Elementos* reduce sensiblemente el uso del lenguaje ordinario imperante en los textos españoles de matemáticas, aproximándose a los estilos más directos y concisos de textos extranjeros que conocía bien, en los que el lenguaje simbólico es usado con más amplitud:

> También nos hemos preocupado de alcanzar en el lenguaje el grado de concisión y precisión usuales en casi todos los libros extranjeros. Es seguro que el poco éxito conseguido en España por algunos excelentes libros importados radica en las dificultades que las inteligencias españolas encuentran para su lectura, y no por inferioridad nativa, sino por equivocada educación; pues acostumbradas a delegar en las páginas impresas el trabajo de discurrir, son incapaces de hacerlo por cuenta propia, cuando ello es necesario [REY PASTOR, 1917, p. 6].

Para Rey Pastor ahorrar espacio y tiempo expositivo significa tener la posibilidad de llegar más lejos:

> También hemos puesto especial cuidado en omitir toda clase de detalles superfluos o secundarios, que solo cansancio y desorientación producen. Deteniéndose solamente en las estaciones principales, es posible llegar en poco tiempo bastante lejos: mientras que perderse en una selva de minucias y

> casos particulares, que confunden y oscurecen los troncos primarios, es esconderse voluntariamente a no salir nunca de la Matemática elemental [REY PASTOR, 1917, p. 4].

Elementos fue una obra recibida como una gran novedad en la matemática española, así se apreció ya el primer *Resumen*, tanto por los contenidos matemáticos y los aspectos generales del diseño del libro —aún mejorados en *Elementos*— como por otros aspectos:

> Dejamos para el final dar cuenta de una utilísima innovación que presenta esta obra. Nos referimos a los artículos titulados «Notas y adiciones» con que finaliza cada capítulo.
> En ellos se exponen sobriamente algunas ampliaciones de importancia secundaria en el «Curso» y se indican listas de libros en diferentes idiomas para el lector que desee profundizar en un determinado tema. Las citas están hechas de manera que evitan toda duda. Hay también al final una lista de tratados completos de Análisis [CORREA, 1914-15, p. 298].

Similar acogida mereció la segunda edición de 1922[10]:

> La literatura española necesita esta obra de Rey, que como todas las suyas, tienden a llenar un vacío que nos falta para llegar a los problemas actuales de la matemática [Pineda, 1923, p. 84].

Sin duda este entusiasmo puesto en la recepción de lo nuevo reflejaba que el joven Rey Pastor superaba a los profesores de la materia en aquel tiempo. *Elementos* tuvo la tercera edición en 1930, con modificaciones y ampliaciones sobre la anterior, pero que no afectaron al contenido de álgebra lineal que protagoniza este artículo; esta edición también fue reseñada, esta vez por Bonet [1930]. Las ediciones posteriores fueron ya simples reimpresiones, que se prolongaron veinte años más allá de la muerte de su autor.

3. Los algoritmos algebraicos lineales en *Elementos*

El «álgebra» presente en *Elementos* está contenida en el bloque temático formado por los siete capítulos siguientes:

> *Parte Primera: El número natural.*— I. Operaciones aritméticas fundamentales; II. Teoría de la divisibilidad numérica; III. Análisis combinatorio.
> *Parte Segunda: El número racional.*— IV. Operaciones elementales; V. Algoritmos de iteración; VI. Algoritmo de los determinantes; VII. Algoritmo algebraico.

Se observa que los «problemas propios» del número natural son la divisibilidad y la combinatoria; mientras que son propios del número racional, algoritmos como las progresiones, las fracciones continuas (finitas y periódicas) o los determinantes, así como el «algoritmo algebraico». Por tal entiende Rey Pastor el estudio de los polinomios de varias variables y su divisibilidad, que realiza en los cuatro primeros apartados del capítulo VII. En el quinto explica con ejemplos la idea general del álgebra como resolución de sistemas de ecuaciones polinómicas, pero, ya en el sexto, advierte que si el grado es mayor que uno se pasa al álgebra superior, quedando para un primer curso tan sólo los sistemas lineales.

En el *Curso de algoritmos algebraicos lineales* que vamos a extraer de *Elementos* prescindiremos del algoritmo algebraico general para poner de manifiesto la continuidad en el tratamiento de determinantes, matrices y sistemas, pues esta secuencia lineal no necesita —hasta donde es desarrollada, sin perjuicio de lo que diremos más adelante sobre divisores elementales— de la teoría general de los polinomios. Tampoco incluiremos en dicho curso la primera parte, evidentemente necesaria como requisito previo, principalmente la combinatoria utilizada en el estudio de los determinantes.

Rey Pastor explica de modo muy claro por qué el algoritmo algebraico es un tema «propio del número racional». Los números adecuados para tratar estos temas son los racionales porque forman un «cuerpo», noción que Rey Pastor asocia a los números en sus sucesivas ampliaciones, siendo el de los racionales el primer cuerpo que se presenta. Lo expresa así:

> **189. Cuerpo de números**. […] Se llama *cuerpo de números o campo de racionalidad* a un conjunto de números, si toda operación racional (adición, sustracción, multiplicación o división de divisor no nulo), con números arbitrarios del conjunto, es siempre posible y el resultado pertenece también al conjunto.
> Todos los números racionales forman, pues, un cuerpo, y éste es el cuerpo más sencillo. En efecto, en cualquier cuerpo de números figura el número 0 (como diferencia entre un número del cuerpo y él mismo), y también el número 1 (como cociente de un número por sí mismo); por tanto, figuran todos los números enteros (como resultado de sumar o restar unidades); luego también figuran todos los números racionales (como cociente de estos enteros). Más adelante veremos cuerpos más extensos que éste [REY PASTOR, 1917, p. 189][11].

Las únicas ampliaciones del cuerpo de los números racionales propuestas en *Elementos* son los cuerpos de los números reales y de los números complejos, que lo son en virtud del principio de permanencia de las leyes formales. La teoría de la divisibilidad de los polinomios de varias variables con coeficientes racionales se repite tal cual, dice Rey Pastor, cuando los coeficientes son reales o complejos. Parece tener claro que lo que expone para el número racional valdrá para cualquier otro cuerpo de números, es decir, cualquier cuerpo intermedio entre los racionales y los complejos, pero sólo los tres básicos —racionales, reales, complejos— aparecen en *Elementos*.

Esta forma de acceder a primeros conceptos abstractos como herramientas que permiten unificar y simplificar la explicación del álgebra clásica en el marco de los sistemas numéricos, es la misma que fue utilizada en las primeras décadas del siglo XX por no pocos algebristas, sobre todo alemanes, anteriores a la implantación generalizada en los años treinta de la nueva imagen del álgebra como teoría de las estructuras algebraicas[12].

La noción de «cuerpo de números» es originaria de Dedekind, se encuentra por primera vez en los últimos suplementos añadidos por este autor a partir de la segunda edición de las *Lecciones sobre teoría de números* de Dirichlet (1871). Está mencionado también en la obra *¿Qué son y para qué sirven los números?* de Dedekind (1888). Rey Pastor no atribuye explícitamente este origen a dicho concepto, pero demuestra ser conocedor de la obra del alemán y se declara seguidor suyo al introducir los números naturales a partir del concepto de coordinación de conjuntos finitos. Las obras antes mencionadas están incluidas entre las referencias que Rey Pastor propone para ampliar el contenido sobre teoría de números dado en *Elementos*. La de Dirichlet está citada por su cuarta edición de 1894, de la que dice:

> Obra clásica, considerablemente ampliada por DEDEKIND en sus últimas ediciones. Contiene la parte elemental y además la teoría de las formas numéricas [REY PASTOR, 1917, p. 123].

3.1. El índice del curso

Pasamos ya a describir el «curso de álgebra lineal» presente en *Elementos*, cuyo contenido básico está formado por determinantes y sistemas lineales, con un mínimo sobre matrices, al que se añade un complemento con más determinantes, el producto de matrices y breves notas sobre resultados adicionales. El orden en que presentamos el índice de este curso parcial sigue casi completamente el de *Elementos*, pero lo hemos simplificado un poco y reubicado al final algunos temas complementarios y notas. El resultado es el programa siguiente:

Curso de algoritmos algebraicos lineales

Determinantes y matrices

- Definiciones y propiedades fundamentales. Determinantes de segundo y tercer orden. Transformaciones de un determinante. Ejercicios.
- Desarrollo de un determinante en suma de varios. Adjuntos. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea. Ejercicios.
- Desarrollo por menores complementarios. Producto de determinantes.
- Determinantes especiales: recíprocos, de Vandermonde, simétricos. Ejercicios.
- Cálculo de matrices. Dependencia lineal de filas y columnas. Característica de una matriz. Cálculo de la característica. Aplicación geométrica.

Sistemas lineales

- Definiciones. Teorema Fundamental de Equivalencia.
- Método de reducción para resolver los sistemas de ecuaciones lineales.
- Regla de Cramer. Sistema general de ecuaciones lineales.
- Sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Ejercicios.

Complementos y notas

- Otros determinantes especiales.
- Teoremas de Hadamard y de Sylvester.

- Determinantes de varias dimensiones.
- Producto de matrices. Sustituciones lineales.
- Divisores elementales.
- Bibliografía.

En la parte básica del curso, Rey Pastor explica el algoritmo de los determinantes siguiendo el plan tradicional: definición combinatoria, propiedades, desarrollos por una y *h* filas, producto de determinantes y determinantes especiales. Introduce las matrices como un cuadro de números

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{matrix}$$

escrito abreviadamente (a_{ij}), cuyo determinante, en el caso cuadrado $m=n$, indica escribiendo la matriz entre barras verticales $|a_{ij}|$. Termina su exposición con un «cálculo de matrices» dedicado a definir su producto y a calcular la característica de las mismas. Finalmente se aborda el estudio de los sistemas lineales.

Los comentarios que siguen sobre el contenido del programa anterior se van a detener tan sólo en los detalles que merecen alguna atención especial. Destacan el producto de determinantes y matrices —tratado por el autor como tema principal y con un añadido significativo en los complementos—, el tratamiento dado a los sistemas lineales y, por último, la mención a los divisores elementales.

3.2. Producto de determinantes y matrices

Para calcular el producto de un determinante $|a_{ij}|$ de orden n por uno $|b_{ij}|$ de orden m, Rey Pastor, siguiendo el modo usual, construye una matriz de orden $m+n$, poniendo $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ en la diagonal principal y en la otra diagonal la matriz O con todos su elementos nulos y una matriz arbitraria $X=(x_{ij})$, cada una de ellas con la dimensión rectangular adecuada. Entonces el determinante de la matriz así obtenida

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & O \\ x_{ij} & b_{ij} \end{vmatrix}$$

se puede calcular desarrollando por los menores de orden n de las primeras n filas; como de todos ellos es $|a_{ij}|$ el único no nulo, resulta el producto $|a_{ij}||b_{ij}|$.

Seguidamente obtiene la tradicional fórmula de Binet-Cauchy haciendo $m=n$ y tomando $x_{ij}=0$ si $i\neq j$, $x_{ii}=-1$, resultando la matriz $-I$ opuesta de la matriz identidad de orden n. Mediante cálculos adecuados se obtiene una cadena de determinantes iguales:

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & O \\ -I & b_{ij} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{ij} & O \\ -I & b_{ji} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & c_{ij} \\ -I & b_{ji} \end{vmatrix}$$

donde (b_{ji}) es la matriz que cambia las filas y las columnas de la matriz $B=(b_{ij})$, cambio que no altera el valor del determinante (la hoy llamada matriz transpuesta). Esta propiedad es enunciada en los siguientes términos [REY PASTOR, 1917, p. 226]:

> **220. Transformaciones de un determinante.** Dos elementos a_{ji} y a_{ij}, simétricos respecto de la diagonal principal $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$, se llaman *conjugados.* Los elementos de ésta son conjugados entre sí mismos.
>
> I. *El valor de un determinante no varía si se sustituye cada elemento por su conjugado, es decir, si se cambian las filas por columnas, y éstas por aquellas, sin alterar el orden relativo de los elementos de cada una.*

Para justificar la segunda igualdad se sustituye cada una de las primeras filas R_i de la matriz por la combinación lineal $R_i+a_{i1}R_{n+1}+a_{i2}R_{n+2}+\ldots+a_{in}R_{2n}$, resultando la matriz nula O en lugar de $A=(a_{ij})$ y apareciendo una matriz $C=(c_{ij})$ cuyo elemento c_{ij} es la «suma de los productos» de los a_{ij} con el índice i fijo por los b_{ji} con j fijo, es decir, el «producto» de la fila i de A por la fila j de B. Finalmente, aplicando de nuevo un desarrollo por menores y realizando un ajuste de signo se concluye la fórmula de Binet-Cauchy $|a_{ij}||b_{ij}|=|c_{ij}|$.

Desde el punto de vista algorítmico seguido por Rey Pastor hay cierta libertad al confeccionar las operaciones, como él mismo señala después de la exposición anterior [REY PASTOR, 1917, p. 241]:

> ESCOLIO. Como el valor de un determinante no altera si se cambian entre sí las filas y las columnas, puede hacerse también el producto por columnas; la fórmula es la misma, designando el producto de la columna *i* del primero por la columna *j* del segundo. Finalmente, puede hacerse multiplicando las filas del primero por las columnas del segundo, ó inversamente.

La libertad para definir el producto usando filas o columnas es bien notoria, ya aparece claramente expuesta —como en el escolio anterior, pero mencionando la multiplicación por «horizontales», «verticales» o por «horizontales y verticales»— en el libro de Echegaray [1868, p. 336], que, como el propio autor declara, es una traducción libre de la primera parte de la obra del italiano Trudi [1862][13].

Más adelante, en un párrafo complementario impreso en cuerpo menor, Rey Pastor explica que este producto de matrices por filas se extiende de cuadradas a rectangulares con las mismas dimensiones, para dar como producto una matriz cuadrada [REY PASTOR, 1917, p. 254]:

239. Producto de Matrices. Dadas dos matrices A y B con igual número n de filas, y el mismo número m de columnas (matrices llamadas *semejantes*):

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{matrix}$$

formemos la matriz cuadrada C de orden n, cuyo elemento general c_{ij} sea el producto de la fila i de la primera por la fila j de la segunda:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \dots + a_{im}b_{jm}$$

y vamos a estudiar la relación que liga las matrices A y B, con esta otra C (formada por los elementos c_{ij}) la cual se llama *producto* de ambas.

Luego, con cálculos similares a los utilizados para demostrar la fórmula de Binet-Cauchy (n=m) obtiene Rey Pastor [1917, p. 255] los resultados clásicos para $n \neq m$.

Este tema no merecería ser destacado por sí mismo, pues no deja de ser habitual en la teoría de determinantes, que Rey Pastor trató sin especiales novedades pero con habilidad para exponer de modo claro y sucinto. Lo que sí vale la pena señalar es la falta de coherencia que se advierte entre lo hasta ahora expuesto con estilo algorítmico tradicional y una breve nota sobre sustituciones lineales en la que el autor se asoma a un modo funcional más moderno de entender las matrices. El producto de matrices cuadradas vuelve a aparecer en la nota III al capítulo VII, donde explica que los coeficientes de una sustitución lineal S forman una matriz cuadrada A, cuyo determinante se denomina el *módulo* de la sustitución. Dadas dos sustituciones S, T de matrices respectivas A y B, el *producto* (composición) de las mismas tiene la matriz c_{ij} en la que cada elemento es

… el producto de la fila i de la matriz B por la columna j de la matriz A; luego esta matriz es el producto de ambas matrices. Por tanto:
El módulo del producto de las dos sustituciones lineales, es el producto de los módulos de ambas. [REY PASTOR, 1917 p. 305]

La afirmación anterior sobre el producto de las matrices es errónea porque definió el producto «fila por fila» y ahora lo usa en la forma «fila por columna», aunque el fallo se suaviza teniendo en cuenta el escolio antes citado, según el cual se recupera la verdad en la afirmación sobre los módulos, pues $|b_{ij}|=|b_{ji}|$.

La exposición del álgebra lineal realizada por Rey Pastor se produce en una etapa de solapamiento de los métodos algorítmicos propios de la teoría de los determinantes que recorre el siglo XIX y las nuevas orientaciones algebraico funcionales introducidas en el último tercio del siglo. Cuando las matrices se asocian a las sustituciones lineales, su producto queda fijado en consonancia con la forma de operar éstas como transformaciones que se componen, apareciendo el producto de matrices estandarizado en la forma «filas por columnas», dejando de lado la ambigüedad propia del método algorítmico. Aunque no comete un error grave, Rey Pastor tiene al menos un desliz al realizar incorrectamente, dentro de una misma obra, el encaje entre la tradición algorítmica que mantiene en el curso básico y el estilo funcional algebraico más moderno que propone como material avanzado complementario[14]. Una de las referencias que incluye en estas notas es el libro de «álgebra superior» de Bôcher [1907], donde aparece la definición funcional del producto de matrices junto con las propiedades algebraicas de este producto; pero Rey Pastor no incorpora a *Elementos* el álgebra matricial.

3.3. Matrices y sistemas lineales

En este punto sí puede decirse que Rey Pastor ofrece un tratamiento bien actualizado para su tiempo. Primero, al terminar el capítulo dedicado a los determinantes, establece la definición de característica de una matriz rectangular y expone el método para obtenerla con el menor gasto posible en los cálculos. Luego, ya en el capítulo siguiente, plantea de modo conciso y completo la discusión general de los sistemas lineales. Comienza observando, y llama al resultado «teorema fundamental de equivalencia», que dos sistemas tienen las mismas soluciones si uno de ellos resulta del otro sumando a una de sus ecuaciones una combinación lineal de otras. Pasa enseguida a resolver los sistemas de igual número de ecuaciones que de incógnitas, para los que da dos métodos. El primero, que recomienda para la resolución práctica en el caso de tener coeficientes numéricos, es el «método de reducción» de Gauss, consistente en triangular el sistema mediante combinaciones lineales de sus ecuaciones. Pero para la discusión completa del sistema debe seguirse, afirma el autor, el método de los determinantes de Cramer, que expone de modo claro y sucinto. Finalmente, explica de modo breve pero completo la solución de los sistemas generales de n ecuaciones con m incógnitas, utilizando el resultado de Cramer y la noción de característica; termina con los sistemas homogéneos tratados como un caso particular. Así enuncia el teorema general:

> I. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales tenga solución, es que la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada con los términos constantes, tengan igual característica.
> II. Si la característica h es igual al número m de incógnitas, la solución es única; si es $h<m$, hay infinitas soluciones, cada una de las cuales está determinada dando un sistema arbitrario de valores a las $m–h$ incógnitas no principales (ROUCHÉ-FROBENIUS) [REY PASTOR, 1917, p. 300].

Para terminar este apartado nos vamos a referir a las menciones que hace Rey Pastor al matemático alemán Frobenius[15], al que conoció cuando estuvo en Berlín durante el curso 1911-12. Digamos en primer lugar que el autor español usa el término «característica» y no el de «rango», anotando a pie de página[16] que «los autores alemanes, siguiendo a FROBENIUS, llaman a este número *Rang*», pero sin indicar referencias concretas. Tampoco justifica los motivos que le llevan, al final de la cita anterior, a asignar el teorema a «Rouché-Frobenius», denominación que no era usual y Rey Pastor adoptó. Si bien al componer este su primer libro de texto ya empezó el autor a proponer abundantes referencias y notas históricas, como hizo después en todas sus obras, en este asunto concreto no ofreció ninguna pista sobre datos que avalaran su asignación. Volveremos sobre este tema en la sección siguiente.

3.4. Divisores elementales

Apenas es un esbozo[17], pero la presencia de esta teoría en un libro de texto español de esta fecha es novedosa. Tan sólo García de Galdeano, profesor de Rey Pastor en Zaragoza, había mencionado antes los divisores elementales[18] como uno de los temas dignos de estudio que todavía no habían sido abordados por los matemáticos españoles. Rey Pastor alude a los divisores elementales en su aspecto algorítmico, como datos asociados a ciertos determinantes «cuyos elementos son funciones enteras de una variable» que se presentan frecuentemente, dice el autor, en geometría analítica. Al mencionar esta procedencia, Rey Pastor pensaría en las colineaciones y los haces de cónicas o cuádricas, pero no se refiere explícitamente a estos problemas de clasificación.

Como en la definición de los divisores elementales interviene la divisibilidad de polinomios, es posible que se encuentre aquí la justificación de la introducción de este tema en *Elementos*, antes del tratamiento de los sistemas de ecuaciones lineales y después del algoritmo de los determinantes; quizá Rey Pastor tuvo el propósito de exponer determinantes de polinomios, desistiendo al ver que esta materia quedaba fuera de los objetivos de un primer curso universitario, en cuyo texto dejó anotada tan sólo una huella inicial de la materia pendiente. En el primer *Resumen* sólo expuso la divisibilidad de polinomios en una variable, que en principio sería suficiente para introducir los divisores elementales, pero en *Elementos* pasó a varias variables, lo que aumenta considerablemente la dificultad, quizá excesiva para el primer curso.

Por otra parte, es digno de ser señalado que Rey Pastor menciona que hay otra teoría paralela de «divisores elementales *numéricos*» para determinantes «cuyos elementos son números enteros» con su propia divisibilidad. La visión unificadora que Rey Pastor acredita para la noción de cuerpo de números mediante la permanencia de las leyes formales, le falta a la hora de comparar la divisibilidad de los enteros y la de los polinomios (con coeficientes en un cuerpo de números), pues capta cierta similitud pero no unificación; antes bien, le parece que las diferencias son esenciales. En este punto Rey Pastor está instalado en el mismo nivel de uso de la abstracción (distintivo de modernidad) que otros autores relevantes que consultó, por ejemplo el propio Bôcher [1907] antes mencionado, pues tardaron en aislarse, más que para los grupos y los cuerpos, las leyes formales de la estructura de anillo[19] que con el tiempo dieron lugar al tratamiento unificado de ambas divisibilidades basado en las propiedades formales del algoritmo de Euclides.

3.5. Otros complementos, notas y bibliografía

Rey Pastor añadió al cuerpo principal de su libro de texto otros comentarios y notas referidos a determinantes especiales y determinantes de varias dimensiones (ejemplificados con *n=3*, determinantes cúbicos), remitiendo a un repertorio de obras para el estudio completo de estos asuntos. Ya hemos señalado la importancia dada por los admiradores de este libro a este tipo de avances hacia estudios superiores orientados mediante bibliografía bien seleccionada. La inclusión de estos incisos refleja también el interés que el autor tenía por dejar en su libro de texto, aun siendo de primer curso, alguna huella de sus intereses como estudioso e investigador. Comentaremos dos de estos incisos.

El primero se refiere a un teorema de Silvester, para cuya demostración remite a la traducción francesa de [WEBER,1895]:

> Por el interés que tiene en la teoría de la eliminación, cuando ésta se desarrolla por los métodos de WEBER, conviene al menos citarlo:
> *Dado un determinante* A *de orden* n, *y elegido en él un menor principal* α *de orden* h, *si designamos por* α_{ij} *el menor orlado de* α *con la fila* i *y la columna* j, *se verifica* $|\alpha_{ij}|=A\alpha^{n-h-1}$ [REY PASTOR, 1917, p. 257].

Si colocó este teorema como una nota adicional en *Elementos* es porque le estaba dando vueltas al mismo en el trance de la preparación de su asignatura de segundo curso. Lo necesitaba para demostrar adecuadamente el teorema de Bézout de eliminación, pero la demostración de Weber no le parecía adecuada por exigir demasiados requisitos. Por eso solicitó información sobre otras demostraciones de este teorema en la sección «Intermediario» del primer tomo (1911-12) de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, en el que unos números después le contestó Terradas remitiéndole a una demostración de Netto mediante derivadas de determinantes, método seguido en [REY PASTOR, 1924][20].

El segundo inciso concierne a un teorema de Hadamard —también enunciado sin demostración— que acota el valor absoluto de un determinante mediante las normas de sus filas. Rey Pastor incluye este teorema porque, dice, es útil en la teoría de las ecuaciones integrales, y recomienda para su demostración el tratado elemental de Pascal [1897], un autor frecuentemente recomendado por Rey Pastor, y el más moderno y avanzado [KOWALEWSKI, 1909][21]. Aunque la mera alusión a los temas lineales de dimensión infinita propios del entonces incipiente análisis funcional parece algo exagerada para un texto de primer curso, el autor insiste en ello en la tercera parte del libro correspondiente a los números reales, donde define el valor de un determinante indefinido como un límite de determinantes finitos y observa que las propiedades básicas de los determinantes finitos se conservan tras el paso al límite. Estas inquietudes apuntan en la dirección de la línea de investigación sobre algoritmos lineales de convergencia y sumación que Rey Pastor [2006] iniciaría pocos años después.

4. Análisis comparado

En esta sección se contrasta el tratamiento dado por Rey Pastor al fragmento de *Elementos* descrito en la sección anterior con el dado a los mismos temas en libros de texto de la época, por una parte la voluminosa obra *Istituzioni di analisi algebrica* del italiano Capelli [1909] y, por otra, varios textos enlazados del español Octavio de Toledo [1902, 1905, 1916]; ambos autores son de edad similar y poco más de treinta años mayores que Rey Pastor. Lo que el italiano presenta en un grueso libro de casi mil páginas, los autores españoles de finales del XIX y principios del XX lo ofertaban en varios volúmenes editados y reeditados en años diferentes según las necesidades del mercado[22]. Aunque algunos juicios tengan valor general para el conjunto de las obras de los autores señalados, la comparación se centrará en lo que a la parte de álgebra lineal se refiere. Nos limitaremos a algunos aspectos en los que las diferencias son dignas de destacarse.

4.1. Rey Pastor y Capelli

En *Istituzioni di analisi algebrica*, Capelli se ajusta perfectamente al plan del análisis algebraico (completado con cálculo diferencial), procede a la construcción sucesiva de los sistemas de números y expone tras cada uno de ellos los temas que le son propios. Esto lo hace de modo natural, sin necesidad de explicar los motivos para hacerlo así. Por el contrario, a Rey Pastor le parece imprescindible hacer explícita la doctrina sobre este método expositivo de introducción al análisis matemático.

Centrándonos en el álgebra lineal, que Capelli también introduce en el ámbito del número racional, el contenido está expuesto en el sexto capítulo[23]:

> VI. Teoría de los determinantes y su aplicación en la resolución de problemas algebraicos de primer grado: Definición de determinante. Propiedades fundamentales de los determinantes. Suma de determinantes. Sistemas de *n* ecuaciones lineales homogéneas con *n* incógnitas. Característica de una matriz. Dependencia e independencia lineal de una forma lineal. Resolución de un sistema de *m* ecuaciones lineales homogéneas con *n* incógnitas. Dependencia e independencia de las ecuaciones. Sistemas de *m* ecuaciones lineales no homogéneas con *n* incógnitas. Condición de compatibilidad. Desarrollo de un determinante por medio de un producto de menores complementarios. Regla del producto de dos determinantes. Multiplicación de Matrices. Sustituciones lineales. Reducción de matrices.

Este contenido es muy similar al dado por Rey Pastor en *Elementos*, con algunas variaciones en el orden de exposición. El texto de Capelli es riguroso y conciso en su exposición, haciendo un uso intensivo del lenguaje simbólico; presenta abundantes ejemplos y cuenta con notas y ejercicios al final del capítulo. El joven matemático español no es menos riguroso, pero sí menos conciso que Capelli, limitando en alguna medida el uso del lenguaje simbólico a favor de la expresión en lenguaje ordinario.

En lo que a la resolución de sistemas se refiere, Kronecker había establecido en sus cursos de la Universidad de Berlín en los años 1860 un tratamiento de la resolución de sistemas lineales considerando primero el caso homogéneo y deduciendo de éste el general añadiendo una variable más que debería admitir el valor 1 en la solución. Entre 1877 y 1881 Capelli, recién licenciado en la Universidad de Roma, fue ayudante de Casorati[24] en la Universidad de Pavía. A finales de los años 70 realizó una estancia en Berlín, donde recibió cursos de Weierstrass y Kronecker[25], lo que explica que Capelli siga la línea expositiva de este último, empezando por los sistemas homogéneos y refiriendo a ellos el caso general. Pero su tratamiento mejora porque introduce la noción de característica que clarifica notablemente la exposición[26]. El autor italiano no cita fuentes ni para su modo de proceder ni para la noción y uso de la característica.

La demostración directa, sin pasar por los sistemas homogéneos, del caso general de resolución de sistemas lineales se atribuye con práctica unanimidad a Rouché [1875, 1880][27]. El autor francés no utilizó el concepto de característica, que puede atisbarse implícito en su demostración.

Rey Pastor —que estuvo en la Universidad de Berlín durante el curso 1911-12, cuando Frobenius era uno de los principales matemáticos de esa universidad— expone directamente la resolución del sistema lineal general, deduciendo el homogéneo como caso particular, en esto sigue a Rouché; por otro lado, también introduce la característica, pero el nombre que asigna al teorema indica que atribuye esta noción a Frobenius, que la llamó rango, y no a Capelli, del que toma Rey Pastor el término «característica». En efecto, la noción de rango fue aislada y utilizada por Frobenius en trabajos diversos en torno a 1880[28]. Para establecer su asignación de prioridad Rey Pastor pudo haber sido influido por Netto[29], para quien el introductor del concepto fue Frobenius, mientras que «A. Capelli demuestra las ventajas didácticas de la noción de rango de una matriz (que él llama la característica de la matriz)»[30].

La vigencia en España de la obra de Capelli durante la segunda década del siglo XX se reconoce al menos en otros dos autores: Octavio de Toledo, al que nos referiremos en el apartado siguiente, y Roberto Araujo García. Este último, de la edad de Rey Pastor y doctorado en 1912, publicó en el tercer volumen de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* un artículo [ARAUJO, 1913-14] sobre la resolución de los sistemas lineales, calificado en su título como «breve ensayo», que le puede disputar a Rey Pastor la prioridad en el uso de la característica en la exposición de los sistemas lineales en lengua española. Se trata de un artículo carente completamente de referencias que, una vez analizado cuidadosamente, se califica sin duda como un «ensayo libre» sobre la parte que Capelli [1909] dedica al tema. Araujo utiliza la característica sin vincularla a Frobenius, como Capelli, sigue el orden expositivo del italiano, utiliza las mismas notaciones, contiene párrafos literalmente traducidos, etc.

Volviendo a la comparativa entre Capelli y Rey Pastor, ambos plantean de modo análogo el producto de determinantes y matrices. El italiano multiplica las matrices por filas y también menciona el producto de sustituciones, pero sin indicar cómo se realiza, limitándose a enunciar el resultado con determinantes, así que no podemos saber si hubiera cometido un desajuste similar al apreciado en *Elementos*.

Debe observarse también que Capelli no trata los divisores elementales y no intercala la divisibilidad de polinomios entre los determinantes y los sistemas, sino que la deja para el capítulo XIX, donde son usados en la teoría de la eliminación que resuelve sistemas de mayor grado. Al estudiar la divisibilidad algebraica, Rey Pastor había indicado en *Elementos*:

> Damos en este artículo las nociones estrictamente necesarias para llegar al cálculo del m. c. d. Una exposición más completa tendrá lugar adecuado en nuestro tratado especial de Álgebra [REY PASTOR, 1917, p. 279].

Así fue, en efecto, utilizó la divisibilidad algebraica expuesta en *Elementos* al ocuparse de la eliminación en su libro de texto de álgebra [REY PASTOR, 1924].

4.2. Rey Pastor y Octavio de Toledo

Octavio de Toledo era desde 1898 catedrático en Madrid, donde impartía junto con Villafañe las asignaturas Análisis Matemático 1º y 2º, ambos contaban con sus propios libros de texto, al igual que Marzal, que les daba réplica en Barcelona[31]. Los libros de Octavio de Toledo que ahora nos interesan se fueron publicando lentamente desde el inicio del siglo XX, formando una serie que quedó inconclusa, quizá porque Octavio de Toledo empezó a compartir las asignaturas con un joven colega brillante y muy bien preparado. En esa competencia se las vieron también como autores de libros dirigidos al mismo público, y el veterano fue superado. Todavía publicó el segundo tomo de su libro sobre *Aritmética universal* [1916], pero a partir de entonces la producción de Octavio de Toledo cesó[32].

Como hiciera antes Marzal, Octavio de Toledo divide su obra, a la manera de Baltzer, en aritmética universal (calculatoria, coordinatoria, determinantes, algoritmos ilimitados) y álgebra (resolución de ecuaciones), sin hacer alusión al análisis algebraico como planteamiento metodológico articulado en torno al método genético de construcción de los sistemas de números. No obstante, en la presentación de la segunda edición de su *Tratado de álgebra* el autor se explicaba así en una «Advertencia» inicial:

> Si conservo a este libro el título de **Tratado de Álgebra** de su primera edición, a pesar de que, por las materias que contiene, tal vez fuera más propio titularlo **Análisis algébrica**, es porque concedo muy escaso valor a los títulos o nombres que llevan los libros; lo interesante en un libro es la materia en él contenida, su título importa poco, y libros de nombres iguales tienen necesariamente que cambiar su contenido y evolucionar con el transcurso del tiempo [OCTAVIO DE TOLEDO, 1914, p. v].

Esta declaración se produjo el mismo año en que Rey Pastor llegó a Madrid para iniciar su implantación docente del análisis algebraico. Un año antes había sustituido a Villafañe por traslado de su cátedra desde Oviedo.

Aun limitándonos a la parcela algebraica lineal que nos ocupa en este artículo, hay varias diferencias que llaman la atención en cuanto se revisan en paralelo las obras de Octavio de Toledo y Rey Pastor. No es tanto el contenido lo que marca el contraste, sino el estilo y el ritmo expositivo, ágil y profundo en Rey Pastor, sosegado, incluso premioso, en Octavio de Toledo. Rey Pastor hace su planteamiento del algoritmo de los determinantes en 36 páginas, mientras que Octavio de Toledo emplea para lo mismo 150 páginas. Con los sistemas de ecuaciones lineales se observa igual tendencia, Rey Pastor los trata en 10 páginas, mientras que Octavio de Toledo emplea 89 páginas. Se comprende el juicio que emitió sobre la obra (todavía como *Resumen*) M. Correa [1915, p. 297]:

> Muy notable también todo lo relativo a ecuaciones algébricas y determinantes, donde señalaremos como excepcional el teorema de Rouché. Tratado con mucha concisión, no se concibe ni mayor rigor ni más sencillez.

Finalmente, destacamos diferencias en la concepción y estructura metodológica del texto. Rey Pastor utiliza diversos tamaños de letra para discriminar la importancia de los temas y facilitar el estudio cíclico del libro, mientras que Octavio de Toledo usa la misma grafía y énfasis a lo largo de todo el texto. Rey Pastor propone ejemplos y ejercicios para los temas tratados, mientras que Octavio de Toledo sólo proporciona ejemplos. Además, Rey Pastor no sólo introduce un índice general muy detallado, sino también índices alfabéticos de materia y autores, ofreciendo así un libro que facilita su consulta permanente; fiel a la costumbre imperante, Octavio de Toledo incorpora sólo el índice general. Señalemos para terminar, como un aspecto diferencial muy importante, la gran riqueza de fuentes bibliográficas clásicas y actualizadas que Rey Pastor propone.

Entrando con algún detalle en el contenido, una de las razones por las que Octavio de Toledo se alarga tanto en las exposiciones sobre determinantes es porque no usa la notación de subíndices y su discurso escrito es en exceso retórico. Representa las matrices cuadradas y los determinantes con la misma notación [OCTAVIO DE TOLEDO, 1916, p. 132]:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

de modo que para distinguir entre unos y otras hay que recurrir al contexto. Como ejemplo de su tono expositivo bastante minucioso y a veces innecesariamente detallista, damos un fragmento del texto que sigue a la matriz anterior:

> Se llama orden o grado de una matriz cuadrada el número que expresa cuantas series de objetos la constituyen, o, lo que es igual, cuantos objetos forman cada serie; así, la matriz es de cuarto orden o grado. Es evidente que el número total de objetos que contiene una matriz cuadrada es igual al cuadrado del número que expresa su grado; así, la matriz de 4.º grado antes escrita, contiene 4^2=16 objetos, y, en general, la de orden n contendrá n^2 elementos.

Octavio de Toledo [1916, p. 208] plantea que la suma de determinantes que «no difieren más que en una fila o columna de un cierto orden» es el determinante de «la matriz que tiene por fila o columna correspondiente la suma general de esas líneas diversas, y las restantes líneas idénticas a las de las matrices dadas». Por el contrario, Rey Pastor [1917, p. 231] plantea la cuestión en orden inverso, como descomposición de un «determinante en suma de p determinantes» cuando «los elementos de una línea son polinomios de p términos». Ambos resultados son correctos, pero Rey Pastor resalta la descomposición del determinante como método eficaz para su cálculo. El enunciado elegido por Rey Pastor se abrevia gracias al uso del término técnico «polinomio», entendido esta vez como expresión de solamente «sumas y diferencias de números o de productos de números».

En la introducción del producto de determinantes Rey Pastor [1917, p. 239-241] pone lo imprescindible para exponer la fórmula de Binet-Cauchy, relegando el producto general de matrices a un momento posterior como tema complementario, mientras que Octavio de Toledo [1916, p. 212-219], que sigue a Baltzer, trata la multiplicación en general desde un principio, con lo que tarda en aparecer el teorema principal.

Rey Pastor también es más ágil y completo en la exposición de los determinantes especiales y en algunas de sus aplicaciones. Por ejemplo, presenta los pfaffianos [1917, pp. 248-248] como caso análogo a un determinante hemisimétrico, mientras que Octavio de Toledo [1916, pp. 268 y sigs.] los expone con todo detalle. También expone con mucho detalle la obtención de una fórmula de Euler-Lagrange como aplicación del teorema de Binet-Cauchy en el caso $n=3$, mientras que Rey Pastor [1917, p. 256] presenta lo mismo como un simple ejemplo[33]. Digamos también que Octavio de Toledo [1916, pp. 275 y sigs.] trata los determinantes cúbicos de modo minucioso, pero Rey Pastor prefiere hacerlo de forma tangencial indicando bibliografía para seguir su estudio.

En lo referente a los sistemas de ecuaciones lineales, la presentación de Octavio de Toledo sigue el uso de los determinantes característicos y principales que hiciera Rouché, mientras que Rey Pastor, como ya dijimos, sigue el método mejorado de Frobenius usando el rango o característica de una matriz. Octavio de Toledo pudo haber actualizado su exposición a través de la obra de Capelli, pues tenemos constancia de que la conocía; había publicado un artículo [OCTAVIO DE TOLEDO, 1914-15] en el que refiere a Capelli [1909] para caracterizar la convergencia de una serie doble.

Este artículo de Octavio de Toledo se publicó en el cuarto tomo de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, con una indicación del autor sobre la falta de originalidad del trabajo, que reproducía una de las lecciones que explicaba en sus clases. En el tomo anterior había aparecido el ya mencionado artículo de Araujo [1913-14], también carente de originalidad. Estos datos se añaden a los ya aportados en otros lugares[34] para explicar la severa crítica ejercida por Rey Pastor a partir de 1915 por el bajo nivel de la revista que era en ese momento el reflejo de la matemática española.

5. Conclusiones

1. La exposición del «álgebra lineal» realizada por Rey Pastor en *Elementos* se ha situado en una etapa de solapamiento de los métodos algorítmicos propios de la teoría de los determinantes que recorre el siglo XIX y las nuevas orientaciones algebraico funcionales introducidas en el último tercio del siglo. Esta transición explica una disfunción en el tratamiento del producto de matrices, realizado unas veces «fila por fila» y otras «fila por columna», que da lugar a un relativo error que se subsana al tomar determinantes.
2. Se ha valorado la presencia de los divisores elementales en *Elementos*, que significa la primera vez que esta teoría se ofrece en un libro de texto español, si bien en forma muy escueta limitada a definiciones, animando al lector a proseguir su estudio mediante referencia adecuadas.
3. La obra del italiano Capelli [1909] fue la que más guió a Rey Pastor en la confección de *Elementos*. Se han establecido las similitudes y diferencias principales entre ambas obras en relación con los temas algebraicos que nos ocupan. Al igual que Capelli, Rey Pastor hace uso —por primera vez en España en libro de texto— de la noción de rango o característica en la demostración del teorema general sobre los sistemas lineales. Rey Pastor atribuye dicho teorema a «Rouché-Frobenius» —lo que ha creado hábito en lengua española—, mientras que el italiano no menciona al alemán.
4. Un artículo de Araujo que se adelanta en la introducción en España de la noción de característica de una matriz, publicado en el volumen de 1913-14 de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, es una «adaptación libre» de lo expuesto por Capelli.
5. Cuando Rey Pastor llegó a Madrid inició una competencia profesional con el otro veterano catedrático de la asignatura, Octavio de Toledo, cuya obra sobre los mismos temas queda prácticamente interrumpida a partir de la aparición de *Elementos*. La comparativa realizada entre las obras de Rey Pastor y Octavio

de Toledo en similares temas algebraicos ha permitido dar más valor a la obra del matemático joven, confirmando, en los temas lineales del álgebra, que *Elementos* fue un libro que aportó modernidad en 1917 a la obra previa de los matemáticos españoles.

6. Al mismo tiempo, introdujo un nuevo estilo de libro con mejoras de formato, como la variedad de índices, la oferta de una lectura cíclica mediante el uso de tres tipos de letra o una abundante bibliografía orientada; en definitiva, considerando que un libro de texto no es un proyecto cerrado vinculado a un curso, sino que debe ser también un libro de consulta y de motivación hacia estudios más avanzados.

Notas

1 Los autores iniciaron este trabajo con una Ayuda a Proyectos de Investigación del Instituto de Estudios Riojanos (Gobierno de La Rioja, 2009) y lo han terminado disfrutando otra de la Universidad de La Rioja (UR, API11/05). La primera autora disfruta de una estancia plurianual en la UR para realizar su doctorado financiada por Colciencias y la Universidad Distrital Francisco José de Caldas (Bogotá, Colombia) y ha contado también con Ayudas de Cooperación Universitaria de la UR.

2 Julio Rey Pastor (1888-1962). Para su biografía anterior a 1920 véase [ESPAÑOL, 2006].

3 [REY PASTOR, 1914, 1916]. Estas obras se han consultado en la biblioteca del Instituto de Estudios Riojanos, donde reposan como donativo de la familia de Graciano Silván González (1874-1934), quien fuera profesor de Rey Pastor en la Universidad de Zaragoza.

4 Que incluía lo que Rey Pastor expuso en *Elementos* (optó por limitar este texto a lo que pudiera ser explicable en el primer curso) más lo que dejó para libros posteriores [REY PASTOR, 1924, 1925]. Dichas asignaturas contaban también con otros temas añadidos, primero fue la trigonometría y después, a partir de 1909, el fragmento inicial del cálculo diferencial.

5 Richard Baltzer (1818-1887), Alfredo Capelli (1855-1910).

6 Hermann Hankel (1839-1873) [1867]. Véase [ESPAÑOL *et al*., 2010].

7 Como era habitual al principio del siglo, los números negativos son introducidos a la vez que las fracciones, aunque su ausencia genera algún inconveniente al explicar la divisibilidad y las ecuaciones diofánticas lineales en la primera parte. La ausencia de los números enteros se corresponde con que la noción abstracta de anillo se empezó a configurar más tarde que las de grupo y cuerpo.

8 Luis Octavio de Toledo (1857- 1934). Para su biografía véase Peralta [2005].

9 Sobre la «generación de 1914» y su relación con la «generación del 98» véanse las obras de Tuñón de Lara [1973] y Cacho Viu [1997]. Véase [ESPAÑOL, 2000] y las referencias allí dadas para situar a Rey Pastor en este contexto.

10 Citamos la reseña del *Resumen*, porque la primera edición de *Elementos* no pudo ser comentada en la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, que cerró en abril de 1917. Con el nombre de *Revista Matemática Hispano-Americana* reapareció en 1919 y en ella se publicó una breve reseña de Pineda (1923) a la segunda edición de *Elementos*.

11 Análogamente, Rey Pastor [1917, pp. 189-190] define «anillo», «módulo» y «grupo», todo ello referido a estructuras numéricas concretas. Usa anillo y grupo según la definición actual (el grupo siempre referido al producto) y sus módulos (como en Dedekind) son los hoy llamados ideales.

12 Son los algebristas situados entre las obras [WEBER, 1895] —conocida en España, pero apenas estudiada, a través de la traducción francesa a la segunda edición alemana de 1898— y [VAN DER WAERDEN, 1930], según el bien conocido análisis histórico de Corry [1996]. Rey Pastor no utiliza

en sus obras otros «cuerpos de números» hasta que en la segunda edición de sus *Lecciones de álgebra*, de 1935, introduce la teoría de Galois; entonces aparecen también, como en el libro de Weber, «cuerpos de funciones racionales». Pero no se ocupó de la noción abstracta de cuerpo hasta la última edición de *Lecciones de álgebra* [REY PASTOR, 1957], véase [ESPAÑOL, 1998].

13 José Echegaray Eizaguirre (1832-1916), Nicola Trudi (1811-1884).

14 Resulta llamativo que no se haya modificado este desajuste en las numerosas ediciones sucesivas que tuvo la obra. También escribe el producto de sustituciones con la notación $S{\cdot}T$, estableciendo que S opera primero y T después, contrariamente a lo que sugiere el símil con la notación habitual para funciones.

15 Ferdinand G. Frobenius (1849-1917) se formó en la Universidad de Berlín, en la que años después sustituyó a quien fuera su profesor, Leopold Kronecker (1823-1891).

16 [REY PASTOR, 1917, p. 252].

17 Media página en letra pequeña en las notas finales al capítulo VII [REY PASTOR, 1917, p. 306].

18 Véase [GARCÍA DE GALDEANO 1907, p. 195]. En esta obra Zoel García de Galdeano (1846-1924) dio un rápido repaso a «lo que *está por hacer entre nosotros*, lo que *falta a nuestros planes de enseñanza*».

19 Abraham H. Fraenkel (1891-1965) inició el estudio estructural del concepto abstracto de anillo durante los mismos años en que se gestó *Elementos*, véase [CORRY, 1996, pp. 208-214]. También Beppo Levi (1875-1961) utilizó esta estructura, con el nombre de «cuerpo de números» pero en un sentido plenamente abstracto, en su obra [Levi, 1916], que Rey Pastor señaló como referencia pero no siguió.

20 Este asunto fue tratado en [ESPAÑOL, 1996, pp. 405-407]. Los autores citados son: Heinrich Weber (1842-1913), Eugen Netto (1848-1919), Esteban Terradas (1883-1950).

21 Ernesto Pascal (1865-1940), Gerard Kowalewski (1876-1950).

22 De igual modo, para una completa comparación de la obra de Capelli [1909] con la análoga de Rey Pastor hay que poner en liza los tres libros en los que este último completó su exposición del análisis algebraico [REY PASTOR, 1917, 1924, 1925]. Véase [ESPAÑOL *et al*., 2010].

23 Traducción de los autores.

24 Felice Casorati (1835-1890).

25 Véase [*Natucci*, 1955] para la vida y obra de A. Capelli. También tiene biografía en Internet: en *The MacTutor History of Mathematics archive* y en *L'Enciclopedia italiana Treccani*.

26 El tratamiento de los sistemas lineales por Capelli no cambió desde la primera edición de su obra *Istituzioni*, publicada en 1894.

27 Eugène Rouché (1832-1910). También hay que considerar a su compatriota Georges Fontené (1848-1923) [FONTENÉ, 1875].

28 Véase [FROBENIUS, 1905], donde el autor, después de reconocer el trabajo previo de Rouché y Fontené, explica su aportación de la noción de rango.

29 E. Netto, graduado en Berlín en 1870, fue un autor que Rey Pastor citó con frecuencia en *Elementos* y otras obras.

30 Netto atribuye el rango a Frobenius en [NETTO, VOGT, 1992, p. 107] y la opinión que se ha citado sobre Capelli está en [NETTO, LE VAVASSEUR, 1992, p. 47]. En la versión inicial alemana de este segundo artículo no se menciona a Rouché y Fontené en relación con los sistemas lineales, pero estos autores aparecen referenciados en los añadidos incorporados por Le Vavasseur a la edición francesa, en la que también hay una mención a Capelli en nota al pie de página (p. 39), en la que Le Vavasseur señala que los datos sobre Capelli le fueron aportados por G. Vivanti. Los artículos de Netto se han citado por el facsímil de la edición francesa realizado por Gabay, pero los originales de Netto en la *Encyklopädie* de Teubner son de 1898, 1899 respectivamente; por otra parte, las traducciones francesas con adiciones, para la *Encyclopédie* de Gauthier-Villars, son de 1904 y 1907.

31 José María Villafañe Viñals (1830-1915), Miguel Marzal Bertomeu (1856-1915).

32 La serie de obras es [OCTAVIO DE TOLEDO, 1902, 1905, 1916]. El primer tomo de *Elementos de Aritmética universal*, tuvo reediciones después de 1917, quizá porque se usaba en centros de enseñanzas medias y profesionales. También su libro de *Trigonometría* tuvo un éxito editorial destacado. Desde 1917 Octavio de Toledo fue decano de la Facultad de Ciencias, cargo al que se dedicó intensamente y con éxito durante muchos años [PERALTA, 2005].

33 Que es un ejercicio propuesto en el libro de Capelli [1909, p. 257].

34 Véase [AUSEJO, MILLÁN, 1993], [ESPAÑOL, 1996].

6. REFERENCIAS

ARAUJO, R. (1913-14) «Breve ensayo sobre los sitemas de ecuaciones lineales», *Rev. de la Soc. Mat. Española, 3*, 78-84, 107-113.

AUSEJO, E. & MILLÁN, A. (1993) "The Spanish Mathematical Society and its periodicals in the first third of the 20th Century". En: E. Ausejo & M. Hormigón (eds.) *Messengers of mathematics: european mathematical journals (1800-1946)*. Madrid, Siglo XXI, 159-187.

BALTZER, R. (1879-81) *Elementos de Matemáticas*, 5 vols. Trad. E. Jiménez y M. Melero. Madrid, F. Góngora y Cía [1ª ed. en alemán, Leipzig 1860].

BÔCHER, M. (1907) *Introduction to higher algebra*. New York, Macmillan.

BONET, E. J. (1930) Reseña de «Rey Pastor. – Elementos de análisis algebraico.- 3ª edición, Un vol. en 4.º de 512 págs. Madrid 1930». *Rev. Mat. Hispano-Americana, 5 (2ª Serie),* 305-307.

CACHO VIU, V. (1997) Repensar el noventa y ocho. Madrid, Biblioteca Nueva.

CAPELLI, A. (1909) *Istituzioni di analisi algebrica*. 4ª ed. Napoli, Pellerano [Ediciones anteriores 1894, 1898, 1902].

CORREA M. (1914-15) Reseña de «Rey Pastor (J.).—Resumen de las lecciones de Análisis matemático (primer curso), explicadas en la Universidad de Madrid. Curso de 1914 a 1915. Un volumen de 430 páginas (litografiado).—Madrid 1914». *Rev. de la Soc. Mat. Española, 4,* 295-298.

CORRY, L. (1996) *Modern algebra and the rise of mathematical structures*. Birkhäuser, Basel.

DEDEKIND, R. (1888) *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig, Vieweg [Trad. e introd. de J. Ferreirós *¿Qué son y para qué sirven los números?*, Madrid, Alianza, 1998].

DIRICHLET, P.G.L. (1871) *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Braunschweig, Vieweg [2ª ed., incluye el *Suplemento X* de Dedekind. La 1ª ed. es de 1863, 3ª 1879, 4ª 1894].

ECHEGARAY, J. (1868) *Memoria sobre la teoría de las determinantes*. Madrid, Roig.

ESPAÑOL, L. (1996) «Julio Rey Pastor en la Revista de la Sociedad Matemática Española (1911-1917)». *Llull, 19,* 381-424.

ESPAÑOL, L. (1998) «Rey Pastor ante los cambios en el álgebra de su tiempo». En: L. Español (ed.) *Matemáticas y región: La Rioja*. Logroño, IER, 63-122.

ESPAÑOL, L. (2000) «Julio Rey Pastor y el espíritu del 98». En: E. Ausejo, Mª. C. Beltrán (eds.) *La enseñanza de las ciencias: una perspectiva histórica*. Zaragoza, SEHCTAR, Universidad de Zaragoza, 169-203.

ESPAÑOL, L. (2006) «Julio Rey Pastor. Primeros años españoles: hasta 1920». *La Gaceta de la RSME*, *9(2),* 546-585.

ESPAÑOL, L.; MARTÍNEZ, Mª.A.; ÁLVAREZ, Y. & VELA, C. (2010) «Julio Rey Pastor y el análisis algebraico. De los apuntes de 1914-16 a tres libros de texto (1917-1925)». *Zubía, 28,* 139-166.

FONTENÉ, G. (1875) «Théorème pour la discussion d'un système de *n* équations du premier degré à *n* inconnues». *Nouv. Ann. Math. (2) 14,* 481-487.

FROBENIUS, G. (1905) «Zur Theorie der linearen Gleichungen». *J. für Math. 129,* 175-180.

GARCÍA DE GALDEANO, Z. (1907) *Exposición sumaria de las teorías matemáticas*. Zaragoza, Imp. E. Casañal.

HANKEL, H. (1867) *Theorie der complexen Zahlensysteme*. Leipzig, Leopold Voss.

KOWALEWSKI, G. (1909) *Einführung in die Determinantentheorie*. Leipzig, Veit.

LEVI, B. (1916) *Introduzione alla Analisi matematica. 1. Teorie formali*. Parma y Paris, Hermann & Fils.

NATUCCI, A. (1955) «In memoria di Alfredo Capelli (1855-1910)». *Periodico di Matematiche, 4 (33),* 257-275.

NETTO, E. & VOGT, H. (1992) «Analyse combinatoire et théorie des determinants». En: J. Molk (ed.) *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*. Paris, Ed. Gabay, Tome I, Vol. I, I.2, pp. 63-132.

NETTO, E. & LE VAVASSEUR, R. (1992) «Fonctions rationelles». En: J. Molk (ed.) *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*. Paris, Ed. Gabay, Tome I, Vol. II, I.9, pp. 1-232.

OCTAVIO DE TOLEDO, L. (1902) *Elementos de aritmética universal I.* Madrid [2ª ed. 1903, 3ª ed. 1905, 4ª ed. 1925].

OCTAVIO DE TOLEDO, L. (1905) *Tratado de álgebra I*. 2ª ed. Madrid [2ª ed. 1914].

OCTAVIO DE TOLEDO, L. (1914-15) «Una lección acerca de las series dobles». *Rev. de la Soc. Mat. Española, 4,* 225-241.

OCTAVIO DE TOLEDO, L. (1916) *Elementos de aritmética universal II*. Madrid.

PASCAL, E. (1897) *I determinanti, teoria ed applicazioni*. Milan, Hoepli.

PERALTA, J. (2005) «Octavio de Toledo, la sucesión de los promotores de nuestro despertar matemático». *La Gaceta de la RSME*, *8(2),* 527-547.

PINEDA, P. (1923) Reseña de «J. Rey Pastor. Elementos de análisis algebraico, segunda edición, Madrid 1922». *Rev. Mat. Hispano-Americana, 5,* 83-84.

REY PASTOR, J. (1914) *Resumen de las Lecciones de Análisis matemático (primer curso) explicadas por D. Julio Rey Pastor. Curso 1914-15*. Madrid.

REY PASTOR, J. (1916) *Resumen de las Lecciones de Análisis matemático (segundo curso) explicadas por D. Julio Rey Pastor. Curso 1915-16.* Madrid.

REY PASTOR, J. (1917) *Elementos de análisis algebraico*. Madrid [2ª ed. 1922, 3ª ed. 1930].

REY PASTOR, J. (1924) *Lecciones de álgebra*. Madrid, Imp. A. Medina (Toledo).

REY PASTOR, J. (1925) *Teoría de las funciones reales*. Madrid, Imp. R. Velasco.

REY PASTOR, J. (1957) *Lecciones de álgebra*. 4ª ed. Madrid, Nuevas Gráficas. Muy ampliada respecto a la 1ª ed. de 1924.

REY PASTOR, J. (2006) *Teoría de los algoritmos lineales de convergencia y de sumación*. Logroño, Instituto de Estudios Riojanos [Ed. anotada por E. Fernández Moral. Original: Universidad de Buenos Aires, 1931].

ROUCHÉ, E. (1875) «Sur la discussion des équations du premier degré». *C. R. Acad. Sci. 81*, 1050-1052.

ROUCHÉ, E. (1880) «Note sur les équations linéaires». *J. de l'École Polytechnique 81*, 221-228.

TRUDI, N. (1862) *Teoria dei determinanti e loro applicazioni*. Napoli, Pellerano.

TUÑÓN DE LARA, M. (1973) Medio siglo de cultura española (1885-1936). 3ª ed. Madrid, Tecnos.

VAN DER WAERDEN, L. (1930) *Moderne Algebra*, 2 vols. Berlin, Springer.

WEBER, H. (1895) *Lehrbuch der Algebra*. Vol. I, Braunschweig, Vieweg [2ª ed. 1898, trad. por J. Griess, *Traité d'algèbre supérieure*, Paris, Gauthier-Villars].