LES PROCÉDÉS D'APPROXIMATION DANS LES OUVRAGES MATHÉMATIQUES DE L'OCCIDENT MUSULMAN

ANISSA HARBILI
Laboratoire des EDP non linéaires et Histoire des Mathématiques
ENS de Kouba-Alger (Argelia)

Resumé

Plusieurs procédés d'approximation de la racine carrée et de la racine cubique d'un nombre ont été exposés dans les ouvrages mathématiques de l'Occident musulman récemment retrouvés. Certains ont été énoncés avec des exemples biens précis dans des chapitres, consacrés au calcul par approximation. D'autres ont été repérés dans des calculs intervenants dans des domaines différents comme la géométrie du mesurage. Les preuves, qui accompagnaient parfois ces énoncés, permettent de dégager les éléments caractéristiques du calcul approché dans la tradition de l'Occident musulman.

Nous nous proposons, dans cette étude, de faire une présentation de toutes les formules d'approximation, que nous avons repérées dans les écrits que nous avons consultés. Notre préoccupation tout au long de cette présentation sera de révéler la nature des objets et des outils de calcul ou d'algèbre, qui ont pu être utilisés dans l'élaboration de ces procédés.

Abstract

Several approximation processes for square and cubic roots of a number are reported in the late discovered West Muslim's scholar works. Some processes are described with specific examples in chapters devoted to approximation calculation. Others have been spotted in calculation mentioned in different areas such as in geometry measurement. Proofs that, sometimes accompanied these statements, enable us to identify the characteristic features of approximation in the West Muslim's tradition.

Our aim, in this study, is to give a presentation of all the approximation processes we have identified and to reveal the nature of objects and tools used in the literature we consulted.

Mots clés: Approximation, Algorithme, Erreur, Excès, Négliger, Itération, Raffinement de l'approximation, Mathématiques, Science Arabe, Occident Musulman.
Keywords: Approximation, Algorithm, Error, Excess, Neglect, Iteration, Refined the approximation, Mathematics, Arabic Science, Muslim West.

Recibido el 5 de agosto de 2010 – Aceptado el 21 de diciembre de 2010

INTRODUCTION

Les études, qui ont été consacrées aux activités mathématiques dans l'Occident musulman, ont signalé la présence d'un calcul par approximation dans certains ouvrages, qui ont été récemment retrouvés. Parmi les plus anciens, nous citons l'ouvrage d'Ibn ^{c}Abdūn (923-après 970) intitulé *Risāla fī t-taksīr* [Epître sur le mesurage] [DJEBBAR, 2005], les deux écrits d'al-Ḥaṣṣār (XII^{e} s.) : *Kitāb al-bayān wa t-tadhkār* [Le livre de la démonstration et de la remémoration] [ḤAṢṢĀR (al-), Ms Rabat B.G, n° 917Q] et *al-Kāmil fī ṣinā^{c}at al-^{c}adad* [(Le (livre) complet dans la science du nombre] retrouvé partiellement [ABALLAGH & DJEBBAR, 1987] et *Fiqh al-ḥisāb* [La science du calcul] d'Ibn Mun^{c}im (m. 1228) [LAMRABET, 2005]. Notre étude portera sur les procédés d'approximation qui ont été énoncés dans ces ouvrages. Nous les exposerons en analysant leurs contenus. Nous présenterons aussi d'autres procédés d'approximation qui ont été énoncés dans certains écrits, rédigés à partir du XIV^{e} siècle, comme ceux d'Ibn al-Bannā (m. 1321) intitulés *Talkhīṣ a^{c}māl al-ḥisāb* [L'abrégé des opérations du calcul] [SOUISSI, 1969] et *Raf^{c} al-ḥijāb ^{c}an wujūh a^{c}māl al-ḥisāb* [Le soulèvement du voile sur les formes des procédés du calcul] [ABALLAGH, 1988]. La présence de ces différents procédés dans les commentaires du *Talkhīṣ* fera, également, partie de notre étude. Enfin, en nous appuyant sur une étude comparative, nous tenterons de dégager les éléments caractéristiques du calcul par approximation dans la tradition de l'Occident musulman.

Mais avant d'entamer la description du contenu de cette tradition, nous allons évoquer, brièvement, certains éléments qui révèlent une utilisation d'un calcul par approximation dans des ouvrages de calcul, d'algèbre et de la géométrie, rédigés dans cette région de l'empire musulman.

Dans le domaine de la géométrie et plus précisément la géométrie du mesurage, Ibn ^{c}Abdūn a utilisé, dans son épître *Risāla fī t-taksīr,* certains procédés pour calculer la racine carrée de quelques nombres non carrés parfaits [DJEBBAR, 2005]. Ces procédés sont ceux qui ont été connus, dans la même période, en Orient musulman [HARBILI, 2005, vol 1, p.162].

Les ouvrages, qui ont été publiés à partir du XI^{e} siècle dont certains nous sont parvenus, montrent que la géométrie euclidienne était dominante. Parmi ces écrits nous citons *Kitāb al-Istikmāl* [Le livre de la perfection] d'al-Mu'taman Ibn Hūd (m. 1085), qui a fait l'objet de plusieurs études et analyses [BOUZARI, 2008 ; DJEBBAR, 1993, 1995, 1997, 1998b ; GUERGOUR, 2006 ; HOGENDIJK, 1986, 1988, 1991, 1996, 2004]. D'après ces études, l'état des connaissances en géométrie a atteint un niveau élevé au XI^{e} siècle surtout avec certains travaux, qui ont été consacrés à la géométrie des coniques. Mais, nous ne savons pas si un calcul approché a accompagné la résolution de certains problèmes géométriques connus[1]. Les références, qui ont été signalées par Ibn Haydūr (m. 1413) aux écrits orientaux et occidentaux comme l'épître sur l'heptagone d'aṣ-Ṣāghānī (X^e s.), *Risāla fī majhūlāt qisiyy al-kura* [Epître sur les arcs inconnus de la sphère] d'Ibn Mu^cādh al-Jiyyānī (XI^e s.) et *al-Mudkhal al-^cilmī* [L'introduction théorique] d'Ibn as-Samḥ (XI^e s.) [DJEBBAR, 1998a, (II) p.37] témoignent de l'influence de la tradition mathématique andalouse sur la production mathématique du Maghreb. Elles permettent aussi de supposer la circulation de quelques travaux orientaux sur le calcul par approximation, rattaché à des problèmes de géométrie. Celui, qu'Ibn Haydūr s'est proposé de résoudre dans son commentaire au *Talkhīṣ* intitulé *Tuḥfat aṭ-Ṭullāb* [La parure des étudiants], consiste à calculer par approximation la longueur du côté d'un polygone régulier à *n* côtés inscrit dans un cercle. Les procédés de ce calcul approché ont été exposés dans le dernier chapitre, qu'il a intitulé *Extraction du côté d'une figure (inscrite) dans un cercle*. [DJEBBAR, 1998a, (II), p. 23].

Dans le domaine de l'algèbre et plus particulièrement au sujet de la résolution des équations algébriques de degré supérieur ou égal à trois, les auteurs des ouvrages, que nous avons consultés, n'ont fait aucune allusion à la théorie géométrique des équations cubiques, qui a été réalisée en Orient par ^cUmar al-Khayyām (m. 1131), ni à la résolution numérique des équations de degré quelconque, qui a été élaborée par Sharaf ad-dīn aṭ- ūsī (XII^e s.).[2] Mais certains d'entre eux ont évoqué quelques types de ces équations. Nous citons, à titre d'exemple, Ibn al-Bannā qui, dans son *Kitāb al-uṣūl wa l'muqaddimāt fīī l-jabr wa l-muqābala [Le livre des fondements et de préliminaires en algèbre et en muqābala],* a résolu l'équation $x^4+2x^3=x+30$ en utilisant un procédé particulier [DJEBBAR, 1990, (II), p. 42]. Dans le *Raf^c al-ḥijāb,* il a exposé, d'une manière brève sans aucune indication supplémentaire, la résolution par approximation de l'équation cubique : $x^3=A$ [DJEBBAR, 1990, (I), p. 87].

Dans le domaine du calcul, les ouvrages qui renferment les algorithmes d'extraction de la racine carrée et de la racine cubique ou des procédés d'approximation, du moins ceux que nous avons pu consulter, sont : les deux livres d'al-Ḥaṣṣār intitulés *Kitāb al-bayān wa t-tadhkār* et *al-Kāmil fī ṣinā^cat al-^cadad*, le livre d'Ibn al-Yāsamīn (m. 1204) intitulé *Talqīḥ al-afkār fī l-^camal bi rushūm al-ghubār* [La greffe des esprits pour l'utilisation des chiffres de poussière], le livre d'Ibn Mun^cim intitulé *Fiqh al-ḥiṣāb* et les deux ouvrages d'Ibn al-Bannā intitulés *Talkhīṣ a^cmāl al-ḥisāb* et *Raf^c al-ḥijāb ^can wujūh a^cmāl al-ḥisāb* ainsi que certains commentaires du *Talkhīṣ*. Dans la majorité de ces ouvrages, l'étude de l'irrationalité du nombre $\sqrt{10}$ et de celle du nombre $\sqrt[3]{10}$ servait à introduire le chapitre consacré au calcul par approximation. En outre, des critères assurant l'irrationalité du nombre $\sqrt{A}$, A étant un nombre non carré parfait, ont été exposés dans un lemme pour préparer l'étude sur les approximations. Nous signalons, aussi, que le calcul approché de la racine carrée et de la racine cubique a été étendu à l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs. Aussi des formules ont été développées pour attribuer des valeurs exactes ou approchées aux nombres $\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ selon la nature des entiers a et b.[3]

Nous nous proposons, dans cette étude, de faire une présentation de toutes les formules d'approximation que nous avons repérées dans les écrits que nous avons cités. Notre préoccupation tout au long de cette présentation sera de révéler la nature des objets et des outils de calcul ou d'algèbre, qui ont pu être utilisés dans l'élaboration de ces procédés[4].

1. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'un nombre entier

L'étude, qui a été consacrée au calcul des racines carrée et cubique, comporte deux étapes importantes : la première expose l'algorithme de l'extraction de la racine carrée d'un nombre carré parfait (respectivement de la racine cubique d'un nombre cube parfait). La deuxième présente les formules d'approximation de la racine carrée (respectivement de la racine cubique). Nous signalons que deux ouvrages n'ont traité qu'une seule partie de cette étude : le *Talqīḥ al-afkār* d'Ibn al-Yāsamīn, qui contient l'algorithme de la racine cubique sans les formules d'approximation du nombre irrationnel $\sqrt[3]{A}$. Le deuxième est le *Rafᶜ al-ḥijāb* d'Ibn al-Bannā, qui contient les formules d'approximation de la racine cubique d'un nombre A sans le calcul de $[\sqrt[3]{A}] = n$.

Dans tous les ouvrages, que nous avons cités, l'algorithme de l'extraction de la racine carrée est basé sur l'écriture des nombres dans le système décimal positionnel et sur l'identité remarquable suivante :

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2.ab$

Ainsi, on se servait du développement décimal d'un nombre A qui est $A=(x_0+x_1+\ldots+x_n)=\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$ c'est-à-dire avec $x_i=a_i.10^i$ et aussi de l'expression

$$\begin{aligned}(x_0+x_1+\ldots+x_n)^2 &= (a_0+a_1.10+\ldots+a_n.10^n)^2\\ &= a_0^{\,2} + (2.a_0a_1 + a_1^{\,2}).10 + (2.a_0a_2 + 2a_1a_2 + a_2^{\,2}).10^2\\ &\quad + \ldots + (2a_0a_n + 2a_1a_n + \ldots + 2a_{n-1}a_n + a_n^{\,2}).10^n\end{aligned}$$

Les formules d'approximation

Soit A le nombre dont on cherche la racine. On suppose qu'il n'est pas un carré parfait et on pose n le plus grand carré, qui lui est inférieur et qui est obtenu par l'algorithme de l'extraction de la racine carrée. On écrit alors $A = n^2 + r$

Formule 1

$$\text{Si } \left(A-n^2\right)<\left((n+1)^2-A\right) \text{ alors } \sqrt{A}=\sqrt{n^2+r}\approx n+\frac{A\text{-}n^2}{2n}$$

$$\text{Si } \left(A-n^2\right)>\left((n+1)^2-A\right) \text{ alors } \sqrt{A}=\sqrt{n^2+r}\approx (n+1)-\frac{(n+1)^2-A}{2(n+1)}$$

Nous retrouvons les deux expressions de cette formule chez Ibn Mun^c^im [HARBILI, 2005, vol 1, p. 169, 190]. Aussi chez Ibn al-Yāsamīn [ZEMOULI, 1993, p. 247] et al-Ḥaṣṣār [ḤAṢṢĀR (al-), Ms Rabat, ff. 77-78] qui ont formulé les deux conditions en termes de : « suivant que le nombre dont on veut calculer la racine est plus proche du plus petit carré ou du plus grand ». Quant à Ibn al-Bannā [SOUISSI, 1969, p. 64], il a utilisé le même procédé dans le *Talkhīṣ* mais il l'a énoncé d'une manière différente. Sa nouvelle formulation est la suivante :

$$\sqrt{A}=\sqrt{n^2+r}\approx n+\frac{r}{2n} \qquad \text{si} \quad r\le n$$

$$\sqrt{A}=\sqrt{n^2+r}\approx n+\frac{r+1}{2n+2} \qquad \text{si} \quad r>n$$

Dans le *Raf^c^ al-ḥijab* [ABALLAGH, 1988, pp. 407-409], il a prouvé que les conditions, qu'il a posées, couvrent bien celles de la première formulation. Il a aussi établi que l'expression $\left(n+\frac{r+1}{2n+2}\right)$ est équivalente à $\left((n+1)-\frac{(n+1)^2-A}{2(n+1)}\right)$.

Tous les mathématiciens postérieurs dont les écrits nous sont parvenus et qui ont été analysés ont répété la formulation d'Ibn al-Bannā. Certains ont même suivi sa démarche pour montrer la relation qu'il y a entre la formulation ancienne et celle-ci.

Justification du procédé

Ibn Mun^c^im n'a pas donné de justification, de même qu'al-Ḥaṣṣār et Ibn al-Yāsamīn. Ces deux derniers ont plutôt utilisé des exemples pour tester l'efficacité du procédé. Quant à Ibn Mun^c^im, il a donné une évaluation de l'erreur commise par ce calcul pour la première expression mais il n'a fait aucun commentaire sur la deuxième [HARBILI, 2005, vol 1, p. 190] :

En considérant $\sqrt{A}=\sqrt{n^2+r}\approx n+\frac{A-n^2}{2n}$, l'erreur commise par ce calcul est par excès et est égale à $\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2$ car $\begin{cases}\left(n+\frac{A-n^2}{2n}\right)^2=n^2+2n\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)+\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2\\ \qquad =A+\left(\frac{A-n^2}{2n}\right)^2\end{cases}$

Pour la deuxième expression, les calculs suivants expliqueraient le silence d'Ibn Mun^c^im :

$$\begin{cases} \left((n+1)-\dfrac{(n+1)^2-A}{2(n+1)}\right)^2 = (n+1)^2-2(n+1)\left(\dfrac{(n+1)^2-A}{2(n+1)}\right)+\left(\dfrac{(n+1)^2-A}{2(n+1)}\right)^2 \\ \qquad = A+\left(\dfrac{(n+1)^2-A}{2(n+1)}\right)^2 \end{cases}$$

Ainsi, comme pour la première expression, l'erreur est par excès et sa formulation est semblable à la première.

Pour établir la preuve du procédé, nous utilisons le raisonnement d'Ibn Mun[c]im pour le calcul approché de la racine cubique d'un nombre et celui d'Ibn al-Bannā réunis :

Si on pose $\sqrt{A} = n + u$ on aura $A - n^2 = 2nu + u^2$ ………………(1)

Comme $0 < u < 1$ nous négligeons le terme u^2 pour avoir $A - n^2 \approx 2nu$

Par conséquent $u \approx \dfrac{A-n^2}{2n}$ d'où $\sqrt{A} \approx n + \dfrac{A\text{-}n^2}{2n}$

Pour la deuxième expression, nous répétons le même raisonnement en posant $(n + 1) = \sqrt{A} + u$………………(2)

Nous avons alors $((n + 1) - u)^2 = n^2 + r$. D'où $(2n + 1) + u^2 = r + 2(n + 1)u$

En négligeant le terme u^2 nous obtiendrons $(2n + 1) - r \approx 2u(n + 1)$

Ceci entraine $u \approx \dfrac{(2n+1)-r}{2(n+1)}$. Mais comme $(2n + 1) - r = (n + 1)^2 - A$ alors

$$\sqrt{A} \approx (n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}.$$

Pour établir la formule d'Ibn al-Bannā, ce dernier a considéré u^2 comme une quantité négligeable en le soustrayant du second membre de l'égalité (1) pour obtenir $A - n^2 \approx 2nu$ c'est-à-dire $u \approx \dfrac{A-n^2}{2n}$.

Puis il l'a ajouté au deuxième membre de l'égalité $(n + 1)^2 - A = u^2 + 2\sqrt{A}.u$ qui découle de (2) pour avoir $(n + 1)^2 - A \approx 2u^2 + 2\sqrt{A}.u = 2u(\sqrt{A} + u) = 2u(n + 1)$ c-a-d

$$u \approx \frac{(n+1)^2 - A}{2(n+1)}$$

Formule 2

$$\sqrt{A}=\sqrt{n^2+r}\approx x_1-\frac{(x_1)^2-A}{2x_1}$$

x_1 étant une valeur approchée du nombre irrationnel $\sqrt{A}$ obtenue par la formule 1

La présente formule est l'itération de la précédente. Elle illustre le principe des approximations successives. Lequel principe a été explicitement énoncé et utilisé par al-Ḥaṣṣār dans son ouvrage *Kitāb al-bayān wa t-tadhkār* [ḤAṢṢĀR (al-), Ms Rabat, ff. 77-78]. Nous l'avons également retrouvée chez Ibn Munᶜim, qui l'a rattachée à la première formule en considérant le carré le plus proche du nombre A un nombre fractionnaire [HARBILI, 2005, vol 1, p. 171, 191]. Ibn Munᶜim a même précisé que, dans ce cas, l'erreur est plus petite et elle deviendra encore plus fine si nous répétons le procédé sur la nouvelle valeur calculée par ce procédé. Nous pouvons formuler ses arguments ainsi : si nous considérons que $\left(n+\frac{A\text{-}n^2}{2n}\right)^2$ est le carré le plus proche de A alors l'erreur commise est par excès. Ainsi, nous appliquons la deuxième expression de la première formule et nous obtiendrons $\left(n+\frac{A\text{-}n^2}{2n}\right)-\frac{\left(\frac{A\text{-}n^2}{2n}\right)^2}{2\left(\frac{A\text{-}n^2}{2n}\right)}$, qui est la formule d'al-Ḥaṣṣār.

Ibn al- al-Bannā a énoncé cette formule dans le *Talkhīṣ* en utilisant l'expression "raffinement de l'approximation". Le choix de cette appellation interprète bien le principe du procédé [SOUISSI, 1969, p. 64].[5] Les mathématiciens du XIVᵉ siècle se sont assuré de la précision du procédé à travers des exemples et ont constaté la possibilité de poursuivre l'itération indéfiniment afin de réduire l'erreur d'une manière progressive jusqu'à la rendre très faible [IBN ZAKARIYYĀ, ff. 53 ; IBN HAYDŪR, Ms al-Ḥasaniyya, pp. 31-32 ; QAṬRAWĀNĪ (al-), pp. 83-84 ; GHURBĪ (al-), ff. 102b-103a, HARBILI, 1997, pp. 334-336]

Formule 3

$$\text{Si } \left((n+1)^2-A\right)>(n+1) \text{ alors } \sqrt{A}\approx(n+1)-\frac{\left((n+1)^2-A\right)-1}{2(n+1)-2}$$

$$\text{Si } \left((n+1)^2-A\right)=(n+1) \text{ alors } A-n^2=n \text{ et } \sqrt{A}\approx{}^1\!/_2\left((n+1)+n\right)$$

$$\text{Si } \left((n+1)^2-A\right)<(n+1) \text{ alors } \sqrt{A}\approx(n+1)-\frac{\left((n+1)^2-A\right)}{2(n+1)}$$

Dans le *Rafc al-ḥijāb*, Ibn al-Bannā s'est proposé de montrer que le contenu de cette formule n'est pas différent de celui de la formule 1. al-Ghurbī (XIVe s.) est l'un des commentateurs du *Talkhīṣ*, qui a clairement présenté cette formule en la distinguant de la première [GHURBĪ (al-), ff. 102 ; HARBILI, 2006, pp. 207-208][6]. Certains commentateurs, comme al-cUqbānī (m. 1408) [HARBILI, 1997, p. 331], ont repris la dernière expression seulement. D'autres, comme Ibn Zakariyyā (m. 1413) [IBN ZAKARIYYĀ, ff. 52-53], ont rapporté la formule entière avec les commentaires d'Ibn al-Bannā.

Justification

Ibn al-Bannā a justifié cette nouvelle formule et a établi la relation qu'il y a entre les conditions, qu'il a posées dans le *Talkhīṣ,* et celles qui sont présentées dans cet énoncé.

1- Pour la première expression, il a montré que $(n+1)-\frac{\left((n+1)^2-A\right)-1}{2(n+1)-2}=$

$$=n+\frac{A-n^2}{2n}.$$

Avec en plus une équivalence entre les deux conditions $\left((n+1)^2-A\right)>(n+1)$ et $A-n^2<n$.

2- Pour la deuxième expression, il a déclaré que $\left((n+1)^2-A\right)=(n+1)$ entraînerait $A-n^2=n$ et inversement. Puis, il a déterminé la valeur approchée de $\sqrt{A}$ en tant que moyenne arithmétique entre les deux racines n et $(n+1)$: $\sqrt{A}\approx ½\left((n+1)+n\right)$.[7]

3- Pour la dernière expression, il a établi que si $[A-n^2>n]$ alors $[A-n^2>\left((n+1)^2-A\right)]$ et inversement. Ensuite, il a montré que $(n+1)-\frac{(n+1)^2-A}{2(n+1)}=$

$$n+\left(1-\frac{n^2+2n+1-A}{2n+2}\right)=n+\frac{r+1}{2n+2}.$$

Cette égalité, qui exprime l'équivalence entre la nouvelle formulation d'Ibn al-Bannā et celle d'Ibn Muncim et d'al-Ḥaṣṣār, a été reprise par les commentateurs du *Talkhīṣ*.

Formule 4

$$\sqrt{A}=\sqrt{n^2+r}\approx n+\frac{r}{2n+1}$$

Cette formule a été utilisée par Ibn [c]Abdūn dans son épître *Risāla fī t-taksīr*. Il ne l'a pas énoncée explicitement mais il l'a appliquée conjointement avec la première expression de la première formule pour calculer la racine carrée de certains nombres, qui ne sont pas des carrés parfaits [DJEBBAR, 2005]. Ibn Zakariyyā a énoncé le contenu de cette formule dans son commentaire au *Talkhīṣ* [IBN ZAKARIYYĀ, ff. 54] de la manière suivante :

$$\sqrt{A} \approx \begin{cases} n + \dfrac{A-n^2}{(n+1)^2 - n^2} \\ \text{ou bien} \\ (n+1) - \dfrac{(n+1)^2 - A}{(n+1)^2 - n^2} \end{cases}$$

Cette formulation présente quelques particularités : Dans la première expression, les termes, qui sont utilisés pour l'énoncer, sont ceux exprimant le procédé d'approximation connu en Orient [HARBILI, 2005, vol 1, p. 162]. La deuxième expression n'a pas été citée dans les ouvrages de calcul que nous avons consultés dans les deux traditions de l'Orient et de l'Occident musulmans. Il est probable qu'Ibn Zakariyyā l'ait trouvée dans des ouvrages plus anciens d'al-Andalus. Il est possible aussi qu'il se soit inspiré de l'étude d'Ibn al-Bannā pour énoncer le procédé avec deux formulations différentes. En utilisant le raisonnement d'Ibn al-Bannā, nous pouvons établir l'égalité entre les deux expressions :

$$(n+1) - \frac{(n+1)^2 - A}{(n+1)^2 - n^2} = n + \left(1 - \frac{(n+1)^2 - A}{(n+1)^2 - n^2}\right) = n + \frac{A - n^2}{(n+1)^2 - n^2}$$

Enfin, il faut signaler que l'erreur commise par ce procédé est par défaut contrairement aux autres procédés que nous avons exposés jusqu'à présent. Mais Ibn Zakariyyā n'a fait aucune allusion à cette particularité.

Formule 5

$$\sqrt{A} = \frac{\sqrt{A.b^2}}{b}$$

Elle a été énoncée par Ibn Mun[c]im, qui a précisé que son application s'étend aux fractions [HARBILI, 2005, vol 1, p. 171, 191]. Pour le choix de $b = 10^n$, le procédé s'identifie avec celui connu en Orient sous le nom de procédé d'approximation par les zéros [HARBILI, 2005, vol 1, p. 164]. Le choix de $b = 60^n$ est le plus indiqué lorsque les calculs sont effectués dans la base sexagésimale. C'est ce qu'a déclaré Ibn al-Bannā dans le *Raf[c] al-ḥijāb* [ABALLAGH, 1988, p. 409] puis les commentateurs du *Talkhīṣ* comme Ibn Zakariyyā [IBN ZAKARIYYĀ, ff. 53].

Cette formule a fait l'objet de quelques commentaires de la part de certains mathématiciens du XIVe siècle comme al-cUqbānī. Ce dernier a précisé qu'il n'est pas obligatoire d'attribuer à b une valeur très grande pour obtenir un résultat meilleur comme l'avaient noté ses prédécesseurs [HARBILI, 1997, pp. 338-342][8].

La justification du procédé est basée sur le résultat suivant $\sqrt{a.b} = \sqrt{a}.\sqrt{b}$. Mais, concernant la nature de l'erreur et son évaluation, rien n'a été signalé dans les textes que nous avons étudiés.

Formule 6

$$\sqrt{A} \approx \frac{\sqrt{Ab^2-1}}{b}$$

C'est le procédé d'approximation qui a été énoncé dans le commentaire d'Ibn Zakariyyā [IBN ZAKARIYYĀ, ff. 54] sans aucune indication sur son origine ou sa validité. De plus, aucun exemple n'a été utilisé pour expliciter les étapes de ce calcul. Une seule précision, sur le choix de b^2 très grand, a été donnée dans le but d'assurer la précision du résultat.

Concernant la nature de l'erreur commise par ce procédé, nous pouvons vérifier que si (Ab^2-1) est un carré parfait elle sera par défaut.[9] Sinon elle restera dépendante de la valeur du nombre A.

L'interprétation que nous pouvons donner à la formulation de ce procédé est la suivante :

On pose $\dfrac{\sqrt{Ab^2-1}}{b} = \sqrt{A-\dfrac{1}{b^2}}$.

Puis, en supposant b^2 assez grand nous pourrons considérer $\left(\dfrac{1}{b^2}\right) \approx 0$

D'où le résultat $\dfrac{\sqrt{Ab^2-1}}{b} \approx \sqrt{A}$

Formule 7

Si n^2, m^2 sont deux nombres carrés tel que $An^2 = m^2+1$ ou bien $An^2 = m^2-1$ alors :

$$\sqrt{A} \approx \frac{An^2+m^2}{2nm}$$

Cette formule a été énoncée par al-Qaṭrawānī (XIVe s.) qui n'a donné aucune indication sur son origine [QAṬRAWĀNĪ (al-), pp. 84-85]. Il a, seulement, précisé que l'erreur commise vaut exactement $e=\dfrac{1}{2^2 n^2 m^2}$ mais sans le prouver. Aucun ouvrage parmi ceux que nous avons consultés ne contient ce type de procédé d'approximation.

La nature de l'erreur peut être déterminée en écrivant la formule comme suit :

$$\sqrt{A} \approx \frac{An^2+m^2}{2nm} \quad \text{avec} \quad An^2 = m^2 \pm 1$$

$$\text{C'est-à-dire :} \quad \left(\frac{An^2+m^2}{2nm}\right)^2 = \begin{cases} \left(\dfrac{2m^2+1}{2mn}\right)^2 & si \;\; An^2 = m^2+1 \\ \left(\dfrac{2m^2-1}{2mn}\right)^2 & si \;\; An^2 = m^2-1 \end{cases}$$

$$\text{D'où} \quad \left(\frac{2m^2 \pm 1}{2mn}\right)^2 = \frac{4m^4 \pm 4m^2+1}{2^2 m^2 n^2} = \frac{4m^2(m^2 \pm 1)}{4m^2 n^2} + \frac{1}{2^2 m^2 n^2} = A + \frac{1}{2^2 m^2 n^2}$$

L'erreur commise est alors par excès et vaut $e=\dfrac{1}{2^2 n^2 m^2}$ comme l'a précisé al-Qaṭrawānī. Pour expliciter les étapes de ce calcul, ce dernier s'est proposé de calculer $\sqrt{3}$ et a utilisé des termes bien précis pour désigner le numérateur et le dénominateur de la fraction. Il s'est exprimé comme suit : « …ceci est [la valeur] améliorée d'après notre terminologie et tu peux l'appeler comme tu veux » pour indiquer le numérateur. Il a ajouté «…et ceci est l'origine d'après notre terminologie aussi » [10] pour désigner le dénominateur. L'analyse du texte permet d'identifier la notion de la moyenne si on écrit le rapport comme suit $\dfrac{An^2+m^2}{2nm} = \tfrac{1}{2}\left(\dfrac{An}{m}+\dfrac{m}{n}\right)$. Puis, en posant, $\sqrt{A} \approx \dfrac{m}{n}$, qui est la valeur approchée obtenue par une des formules précédentes, nous pouvons déduire : $\dfrac{An^2+m^2}{2nm} \approx \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{A}+\dfrac{m}{n}\right)$ en utilisant des relations, comme $\sqrt{\dfrac{1}{A}} = \dfrac{1}{\sqrt{A}} \approx \dfrac{n}{m}$, dont l'usage est fréquent dans les ouvrages que nous avons cités. Ainsi l'appellation de moyenne[11] serait attribuée au rapport entier $\dfrac{An^2+m^2}{2nm}$. Il est possible aussi de traduire le mot par « (la valeur ou le terme) corrigé » ou « (la valeur ou le terme) rectifié » ou même « (la valeur) améliorée (du nombre $\sqrt{A}$) »[12] car le principe du procédé repose sur la fraction $\frac{m}{n}$, obtenue par des procédés d'approximations. L'élément qui pourrait confirmer cette lecture est le mot « *al-aṣl* » par lequel a été nommé le dénominateur. Cette appellation traduit bien le sens d'origine, qui pourrait être attribué à la fraction initiale $\frac{m}{n}$.

Nous signalons qu'al-Qaṭrawānī a précisé qu'il est possible d'affiner cette approximation en choisissant des nombres carrés n^2, m^2 très grands. Il n'a pas indiqué la manière de les trouver mais il a montré à travers le seul exemple qu'il a traité, $\sqrt{3}$, comment ce choix pourrait donner une meilleure précision.

2. Les procédés d'approximation de la racine carrée d'un nombre fractionnaire

Formule

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{ak^2b}}{kb}$$

La valeur de $\sqrt{ab}$ est calculée par les procédés d'approximations déjà cités al-Ḥaṣṣār a explicitement énoncé les deux premières formules à travers des exemples [ḤAṢṢĀR (al-), Ms Rabat, ff. 77-78). Quant à Ibn Munᶜim, il n'a énoncé que la deuxième en utilisant une expression différente [HARBILI, 2005, vol 1, pp. 191-192][13]. Ibn al-Bannā a énoncé les deux premières expressions dans le *Talkhīṣ* [SOUISSI, 1969, p. 64]. Nous avons retrouvé la formule avec ses trois expressions suivant des ordres différents, dans la majorité des ouvrages du XIVᵉ et XVᵉ siècles.

Preuve

La preuve de ce procédé est basée sur la relation qui lie les nombres radicaux c'est-à-dire : $\sqrt{a.b}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$, $\qquad \frac{\sqrt{a.b^2}}{b}=\frac{\sqrt{a}.\sqrt{b^2}}{b}=\frac{\sqrt{a}.b}{b}=\sqrt{a}$, $\qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

3. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'un nombre entier

Tout nombre entier A, qui n'est pas un cube parfait, est encadré par deux nombres cubes consécutifs : $n^3 \leq A < (n+1)^3$. Le calcul de n se fait en appliquant l'algorithme d'extraction de la racine cubique, qui est essentiellement basé sur l'identité $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ et également sur l'écriture du nombre dans le système décimal positionnel. Les étapes de cet algorithme ont été clairement exposées par Ibn Munᶜim [LAMRABET, 2005, pp. 68-73], Ibn al-Yāsamīn

[ZEMOULI, 1993, pp. 264-266] et aussi al-Ḥaṣṣār dans la partie retrouvée d'*al-Kāmil* [ḤASSĀR (al-), Ms marrakech, ff. 224-234]. Contrairement à l'algorithme de la racine carrée, celui-ci n'a pas une représentation spécifique qui le caractérise. Chaque opération de ce calcul est effectuée en fonction des chiffres qui déterminent la racine recherchée, et des coefficients 1 ou 3. Elles sont toutes indépendantes l'une de l'autre.[14]

Une fois que l'entier n est déterminé nous écrirons $A = n^3 + r$.

LES FORMULES D'APPROXIMATION

Formule 1

$$\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{n^3 + r} \approx n + \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)\right)^2 + \frac{A-n^3}{3n+1}} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)$$

Cette formule a été énoncée par Ibn Mun^cim [LAMRABET, 1981, pp. 66-67 ; DJEBBAR, 1987, p. 191]. L'étude, qui a été réalisée par al-Ḥaṣṣār, sur le calcul de la racine cubique d'un nombre par des procédés d'approximation est contenue dans le deuxième volume de son ouvrage *al-Kāmil* non encore retrouvé [ABALLAGH & DJEBBAR, 1987]. La table des matières présentée dans le préambule du premier volume indique même le titre du chapitre, qui a été consacré pour cette étude[15]. Quant à Ibn al-Yāsamīn, il n'a pas évoqué le calcul approché des racines cubiques dans son ouvrage *Talqīḥ al-afkār*. Au XIVe siècle, Ibn Zakariyyā a reproduit cette formule, dans son commentaire intitulé *Ḥaṭṭ an-niqāb bcda rafc al-ḥijāb can wujūh acmāl al-ḥisāb* [Abaissement de la voilette après le lever du voile sur les formes des procédés du calcul] en ajoutant la condition $A - n^3 \leq (n+1)^3 - A$ [IBN ZAKARIYYĀ, ff. 58]. al-Qaṭrawānī a, lui aussi, énoncé cette formule dans son écrit intitulé *Rashf ar-Ruḥāb min thughūr acmāl al-ḥisāb* [Succion du nectar des bouches des opérations du calcul] à la manière d'Ibn Muncim c'est-à-dire sans poser de condition [QAṬRAWĀNĪ (al-), pp. 102-104]. Mais, pour nommer les différents rapports, qui interviennent ainsi que le dénominateur, al-Qaṭrawānī a utilisé les termes suivants : le *dénominateur* pour $(3n+1)$, la *racine* pour $\frac{A-n^3}{3n+1}$ et l'*excès* pour $\frac{3n^2}{3n+1}$[16]. Al-Qaṭrawānī, qui est d'origine egyptienne [DJEBBAR, 2005, p. 143], a ainsi utilisé une terminologie qui n'a pas été signalée par Ibn Muncim et Ibn Zakariyyā mais qui pourrait être rattachée aux pratiques calculatoires du Caire, au XIVe s.

Justification[17]

Pour justifier cette formule, Ibn Muncim a emprunté une démarche algébrique après avoir utilisé $u^2 \approx u^3$ lorsque le nombre positif u est supposé plus petit que 1 [LAMRABET, 1981, p. 69 ; DJEBBAR, 1987, p. 191]. En effet :

Si on pose $\sqrt[3]{A} = n+u$ (avec $0<u<1$) on obtiendra $A=n^3+3n^2u+3nu^2+u^3$

Mais avec $u^2 \approx u^3$ on aura $A-n^3 \approx 3n^2u+(3n+1)\,u^2$

Puis, pour déterminer la valeur de l'inconnue u, on résout l'équation

$$u^2+\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)u=\frac{A-n^3}{3n+1}$$

C'est une équation quadratique dont la solution est

$$u=\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)\right)^2+\frac{A-n^3}{3n+1}}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)$$

Formule 2

$$\sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{n^3+r}\approx(n+1)-\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}\right)-\sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}\right)^2-\frac{(n+1)^3-A}{3(n+1)-1}\right]}\right]$$

Comme la première formule, celle-ci a été énoncée par Ibn Mun^cim [LAMRABET, 1981, pp. 66-67]. Ibn Zakariyyā l'a reproduite dans *Ḥaṭṭ an-niqāb* en ajoutant la condition $A-n^3>(n+1)^3-A$. Il a, aussi, précisé que la preuve de la validité des deux procédés a été établie par Ibn Mun^{c}m et Ibn Ṭāhir [IBN ZAKARIYYĀ, ff. 59a]. al-Qaṭrawānī l'a énoncée à la manière d'Ibn Mun^{c}im c'est-à-dire sans condition. Il a nommé le terme : $3(n+1)-1$ le *dénominateur*, $\frac{(n+1)^3-A}{3(n+1)-1}$ la *racine* et $\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}$ l'*excès*.

Justification [HARBILI, 2005, vol 1, pp. 174, 184-185, 195-197].

Si on pose $\sqrt[3]{A}=(n+1)-v$ (avec $0 < v < 1$) on obtiendra $A=(n+1)^3-3\,(n+1)^2v+3\,(n+1)\,v^2-v^3$

En supposant $v^2 \approx v^3$ on aura $(n+1)^3-A \approx 3\,(n+1)^2v+(3\,(n+1)-1)\,v^2$

Comme pour le cas précédent, on résout l'équation quadratique

$v^2+\left(\frac{(n+1)^3-A}{3(n+1)-1}\right)=\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}v$ afin de déterminer la valeur de l'inconnue v.

La solution est $v=\tfrac{1}{2}\left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}\right)-\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}\right)\right)^2-\frac{(n+1)^3-A}{3(n+1)-1}}$

Ibn Muncim s'est beaucoup intéressé aux erreurs qui sont produites par ces calculs. Il a signalé qu'elles ont été commises au niveau de l'optimisation $u^2 \approx u^3$, $v^2 \approx v^3$ et au cours du calcul de u ou de v [HARBILI, 2005, vol 1, p. 197], qui sont exprimés en fonction des nombres radicaux

$$\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)\right)^2+\frac{A-n^3}{3n+1}} \quad \text{et} \quad \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}\right)\right)^2-\frac{(n+1)^3-A}{3(n+1)-1}}\,.$$

Nous signalons qu'il est possible de vérifier que l'erreur est par défaut en appliquant la formule 1 mais elle devient par excès lorsque nous utilisons la deuxième formule. Ibn Muncim n'a fait aucune allusion à ce résultat important, qui peut être établi en utilisant des notions algébriques. Il est probable que ce soit ce même résultat qui a incité al-Qaṭrawānī à proposer la formule suivante :

Formule 3

$$\sqrt[3]{A} \approx \frac{x_1+x_2}{2}$$

$$x_1 = n+\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right)\right)^2+\frac{A-n^3}{3n+1}}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{3n^2}{3n+1}\right) \text{ et}$$

$$x_2 = (n+1)-\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}\right)-\sqrt{\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{3(n+1)^2}{3(n+1)-1}\right)^2-\frac{(n+1)^3-A}{3(n+1)-1}\right]}\right]$$

Le principe de la moyenne arithmétique, qui est exposé par cette formule, a été énoncé par al-Qaṭrawānī dans le but de minimiser l'erreur commise par la formule 1 ou la formule 2 [QAṬRAWĀNĪ (al-), p. 104].[18] Ce procédé d'approximation peut être justifié par la nature des valeurs x_1, x_2 qui n'a été évoquée ni par Ibn Muncim ni par Ibn Zakariyyā. al-Qaṭrawānī l'avait certainement constaté du moins pour l'exemple qu'il a traité[19].

Formule 4

$$\sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{n^3+r}\approx\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{A-n^3}{3n}+\left(\frac{n}{2}\right)^2}$$

$$\sqrt[3]{A}=\sqrt[3]{n^3+r}\approx\frac{n+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\frac{(n+1)^3-A}{3(n+1)}}$$

Ibn al-Bannā a exposé les deux expressions de cette formule dans le premier chapitre du *Raf^c al-ḥijāb* [ABALLAGH, 1988, p. 296]. Dans sa description du procédé, il a donné quelques précisions sur le raisonnement qu'il a utilisé. En nous basant sur ses indications, nous pouvons reproduire la preuve de ce procédé d'approximation. Mais avant, nous signalons que cette formule a été utilisée par Ibn Haydūr (m. 1413) pour le calcul de $\sqrt[3]{10}$ dans son commentaire au *Raf^c al-ḥijāb* intitulé *Tuḥfat aṭ-ṭullāb wa umniyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Raf^c al-ḥijāb* [La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du Raf^c al-ḥijāb] [IBN HAYDŪR, Ms Vatican, ff. 39b-40a][20]. Au XIXe siècle, Muḥammad Ibn yūsuf Ṭfayyash a reproduit dans son commentaire au *Kashf al-'asrār ^{c}an ^{c}ilm ḥurūf al-ghubār* [Révélation des secrets relatifs à la science des chiffres de poussière] d'al-Qalaṣādī (m. 1486) l'étude d'Ibn al-Bannā en citant l'exemple d'Ibn Haydūr [ṬFAYYASH, pp. 460-461).

Preuve

a. Si on pose $\sqrt[3]{A} = n+u$ (avec $0<u<1$) on aura $A=n^3+3n^2u+3nu^2+u^3$. Puis, en utilisant $u^3 \approx 0$ on aboutit à l'équation quadratique suivante : $u^2+nu=\frac{A-n^3}{3n}$ dont l'inconnue est u. C'est la quatrième équation dans la classification d'al-khwārizmī (m. 850) dont la solution est

$$u=\sqrt{\frac{A-n^3}{3n}+\left(\frac{n}{2}\right)^2}-\frac{n}{2}. \qquad \text{D'où} \qquad \sqrt[3]{A}\approx\frac{n}{2}+\sqrt{\frac{A-n^3}{3n}+\left(\frac{n}{2}\right)^2}$$

b. En posant $\sqrt[3]{A}=(n+1)-v$ (avec $0<v<1$) on aura $A=(n+1)^3-3(n+1)^2v+3(n+1)v^2-v^3$. Puis, en utilisant $v^3 \approx 0$ on aboutit à l'équation $v^2+\frac{(n+1)^3-A}{3(n+1)}=(n+1)v$ dont l'inconnue est v. C'est la cinquième équation dans la classification d'al-khwārizmī dont la solution est

$$v=\left(\frac{n+1}{2}\right)-\sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\frac{(n+1)^3-A}{3(n+1)}}. \quad \text{D'où} \quad \sqrt[3]{A}\approx\frac{n+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\frac{(n+1)^3-A}{3(n+1)}}$$

Même dans sa forme courte et abrégée, l'étude d'Ibn al-Bannā est spécifique et se distingue de celle d'Ibn Mun^{c}im. L'auteur du *Raf^c al-ḥijāb* a utilisé des outils algébriques comme son prédécesseur mais il a introduit une nouvelle manière d'utiliser l'idée de négliger les puissances supérieures d'un nombre fractionnaire positif et plus petit que l'unité. En posant $u^3 \approx 0$ et $v^3 \approx 0$, Ibn al-Bannā visait à annuler ces termes pour qu'ils n'interviennent pas dans les équations, qui découlent des deux égalités $\sqrt[3]{A}=n+u$ et $\sqrt[3]{A}=(n+1)-v$. Cette nouvelle approche a donné naissance à des formules plus simples dont l'avantage se situe au niveau de la réduction du nombre des opérations à effectuer. En outre avec la formulation d'Ibn al-Bannā, il est plus facile d'établir que la valeur approchée est par excès, à travers la première expression, et par défaut à travers la deuxième.

Formule 5

$$\sqrt[3]{A} = \frac{\sqrt[3]{A.b^3}}{b} \quad \text{ou bien} \quad \sqrt[3]{A} \approx \frac{\left[\sqrt[3]{A.b^3}\right]}{b}\,{}^{21}$$

Ce procédé a été formulé par Ibn Zakariyya dans le but d'attribuer à $\sqrt[3]{A}$ une valeur approchée plus précise. Pour l'énoncer, il a fait référence aux procédés d'approximation de la racine carrée [IBN ZAKARIYYĀ, ff. 58b-59a].

4. Les procédés d'approximation de la racine cubique d'un nombre fractionnaire

Formule 1

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}(kb)^3}}{kb}$$

Cette formule a été énoncée par Ibn Munᶜim qui a précisé que le choix de (kb) assez grand assure une valeur plus précise du nombre $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ [HARBILI, 2005, vol 1, pp. 185-186, 197-198]. Elle a été reprise par Ibn Zakariyyā avec l'expression suivante $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b}\right).k^3}}{k}$, k étant un entier, choisi très grand et divisible par b [IBN ZAKARIYYĀ, ff. 60].

Preuve

La justification, qui a été proposée par Ibn Munᶜim, est basée sur un exemple précis.

Nous pouvons la généraliser ainsi :

Puisque $\frac{a}{b} = \frac{ab^2}{b^3}$ alors $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$

Aussi $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{(ab^2)k^3}}{kb}$ d'où la formule $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{a}{b}(kb)^3}}{kb}$

Formule 2

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{ak}{bk}}=\frac{\sqrt[3]{ak}}{\sqrt[3]{bk}}$$

Cette formule a été énoncée par al-Qaṭrawānī, qui a précisé que k doit être choisi de telle sorte que (bk) soit un cube parfait. Mais avant de l'appliquer sur des exemples, il a distingué le cas où a et b sont des cubes parfaits et a énoncé la formule $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ [QAṬRAWĀNĪ (al-), p. 105]. Ce cas a été évoqué de la même manière par Ibn Zakariyyā [IBN ZAKARIYYĀ, ff. 60].

Formule 3

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a.b^2}}{b}$$

C'est la formule qui a été énoncée par Ibn Zakariyya [IBN ZAKARIYYĀ, ff. 60b] qui s'est probablement inspiré du procédé d'approximation de la racine carrée exprimé par $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$.

Conclusion

Pour conclure cette étude partielle sur les procédés d'approximation, nous allons évoquer brièvement certains éléments, qui caractérisent la tradition de l'Occident musulman et d'autres, qui la rattachent à celle de l'Orient. Parmi les procédés d'approximation, qui sont communs aux deux traditions, il y a la formule d'al-Khwārizmī $\sqrt{n^2+r}\approx n+\frac{r}{2n}$, qui est utilisée sous une formulation différente dans des textes mathématiques anciens : babyloniens [NEUGEBAUER, 1969, pp. 35, 47, 50, 52] et grecs [HEATH, 1981, pp. 323-325]. Dans les ouvrages de l'Occident musulman, elle a été énoncée avec la condition $r\leq n$. Quant à la formule $\sqrt{n^2+r}\approx n+\frac{r}{2n+1}$, qui a été proposée dans les ouvrages de calcul de l'Orient, publiés à partir du X^e^ siècle [HARBILI, 2005, vol 1, pp. 162], elle a été repérée dans certains calculs qu'Ibn ^c^Abdūn a effectués. Au XIV^e^ siècle, elle a été clairement énoncée par Ibn Zakariyyā, qui a, en plus, écrit le dénominateur à la manière des mathématiciens de l'Orient du XII^e^ siècle. Cet énoncé n'a pas été cité dans les autres écrits de l'Occident musulman, du moins ceux que nous avons consultés, mais sa présence dans l'ouvrage d'Ibn ^c^Abdūn et dans celui d'Ibn Zakariyyā incite à faire quelques hypothèses. Tout d'abord, cette formule et celles, que seul Ibn Zakariyyā a énoncées, ont, apparemment, été établies et utilisées par les mathématiciens d'al-Andalus. Mais, comme elles n'ont pas été étudiées par ceux qui ont vécu au Maghreb, nous pouvons supposer l'existence de deux traditions distinctes mais complémentaires dans l'Occident musulman : celle d'al-Andalus et celle du Maghreb.

Cette étude présente d'autres éléments, qui caractérisent la tradition de l'Occident musulman et la distinguent de celle de l'Orient. En effet, le raisonnement qui a été adopté et les outils de calcul et d'algèbre, qui ont été manipulés simultanément, ont donné naissance à des formules très différentes de celles de l'Orient. L'idée de négliger les quantités positives plus petites que l'unité n'a pas été évoquée par les mathématiciens de l'Orient dont les écrits nous sont parvenus. Cependant, elle a été clairement utilisée par Ibn al-Bannā dans le calcul de la racine carrée. D'ailleurs, son utilisation a été remarquable car elle a consisté à additionner ou à soustraire des termes (u^2 ou v^2), considérés négligeables, à un seul membre d'une égalité. Pour le calcul de la racine cubique, elle a été utilisée de deux manières différentes : la première a été adoptée par Ibn Mun[c]im en considérant $u^3 \approx u^2$ (ou $v^3 \approx v^2$) et la deuxième par Ibn al-Bannā en posant $u^3 \approx 0$ (ou $v^3 \approx 0$). Après Ibn al-Bannā, les mathématiciens, auteurs des ouvrages que nous avons cités, ont soit repris les formules d'Ibn Mun[c]im, comme Ibn Zakariyyā, soit reproduit les formules d'Ibn al-Bannā avec ses démonstrations en les faisant suivre d'exemples, comme Ibn Haydūr.

NOTES

1 Parmi les problèmes géométriques connus, nous pouvons citer la trisection de l'angle, qui a été étudié par Ibn Sayyid [DJEBBAR, 1990, (I), p. 347]

2 La résolution des équations de degré inférieur ou égal à deux est connue par les mathématiciens de l'Occident musulman [DJEBBAR, 1990].

3 Quatre cas ont été étudiés avec soin : selon que a et b soient des carrés parfaits respectivement cubes parfaits ou non.

4 Certaines de ces formules ont été déjà présentées et étudiées, pour la première fois par D. Lamrabet dans son Mémoire de Maîtrise [LAMRABET, 1981].

5 Ibn al-Bannā a utilisé l'expression "tadqīq at-taqrīb" que M. Souissi a traduit par "raffinement de l'approximation".

6 al-Ghurbī a, en fait, rapporté l'étude d'Ibn al-Bannā sans préciser son origine.

7 Cette formule coïncide bien entendu avec les deux formules du premier procédé appliquées pour le cas particulier $r = n$. Elle a été énoncée explicitement dans le *Raf[c] al-ḥijāb* mais seulement vers la fin de la section consacrée au calcul approché.

8 al-[c]Uqbānī a prouvé à travers un exemple que le choix de b assez grand ne garantit pas toujours une minimisation de l'erreur. Pour cela, il s'est proposé de calculer $\sqrt{6}$ en choisissant d'abord $b=9$. Pour cette valeur l'erreur commise est $e_1 = \frac{25}{1664}$. Puis, pour $b=4$, il a trouvé une erreur $e_2 = \frac{1}{400}$. Avec $e_1 > e_2$, il a pu confirmer sa remarque. [HARBILI, 1997, pp. 338-342].

9 C'est la deuxième fois que nous rencontrons un procédé d'approximation donnant une valeur par défaut dans l'Occident musulman. Ibn Zakariyyā n'a fait aucun commentaire sur le procédé et n'a pas utilisé des exemples pour l'expliciter.

10 Les deux expressions d'al-Qaṭrawānī sont : « hādha huwa al-muᶜaddal iṣṭilāḥan minnā wa laka an tusammīh kayfa shi't » et « wa hādha al-aṣl iṣṭilāḥan minnā ayḍan »

11 Le terme « al-muᶜaddal » a été traduit par « moyenne » dans l'étude de D. Lamrabat sur « *La mathématique maghrébine au moyen âge »* [LAMRABET, 1981, p. 57bis].

12 Cette explication est fondée sur l'exemple, qui a été traité par al-Qaṭrawānī.

13 Ibn Munᶜim a proposé l'expression suivante $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right).b^2}}{b}$.

14 On ne peut pas parler du schéma Ruffini-Horner pour les algorithmes de l'Occident musulman puisque les étapes du calcul sont indépendantes l'une de l'autre.

15 En effet, ff 2a du Manuscrit de Marrakech contient la table des matières de l'ouvrage. Cette table indique que le onzième chapitre est consacré à l'extraction des racines des fractions et des entiers et à l'extraction des racines cubiques dans le cas rationnel et irrationnel : « *al-bāb al-ḥādī ᶜashar fī istikhrāj judhūr l-kusūr wa judhūr al-'aᶜdād aṣ-ṣiḥāḥ wa aḍlāᶜ al-mukaᶜaabāt fi l-munṭaq min dhālika wa ghayr al-munṭaq*.

16 La terminologie utilisée est la suivante : *al-imām* pour le dénominateur, *al-aṣl* pour la racine et *al-fala* pour l'excès.

17 Pour justifier ce procédé, Ibn Munᶜim s'est basé sur des exemples précis, il a d'abord choisi $A = 70$ pour la première formule ensuite $A = 42$ pour la deuxième.

18 Dans son Mémoire, D. Lamrabet n'a pas énoncé la formule 3 mais il l'a appliquée sur certains exemples pour montrer qu'elle donne une mailleure précision [LAMRABET, 1981, p. 68].

19 Les calculs, qu'al-Qaṭrawānī a présentés, montrent bien la nature des deux valeurs [QAṬRAWĀNĪ (al-), p. 104].

20 Nous signalons que l'édition de cet ouvrage a été réalisée par Moslih.A mais il ne nous a pas été possible de la consulter : MOSLIH, A. : *Tuḥfat aṭ-ṭullāb wa umniyat al-ḥussāb fī sharḥ mā ashkala min Rafᶜ al-ḥijāb li Ibn Haydūr at-Tādilī* [La parure des étudiants et le souhait des calculateurs sur l'explication des difficultés du Rafᶜ al-ḥijāb d'Ibn Haydūr at-Tādilī], Thèse de Doctorat, Rabat, Université Mohammed V, 2006.

21 $\left[\sqrt[3]{Ab^3}\right]$ est la partie entière du nombre irrationnel $\sqrt[3]{Ab^3}$ obtenu en utilisant l'algorithme d'extraction de la racine cubique du nombre (Ab^3).

BIBLIOGRAPHIE

ABALLAGH, M. (1988) *Rafᶜ al-ḥijāb d'Ibn al-Bannā*. Edition critique, traduction française et analyse mathématique. Thèse de Doctorat, Université de Paris I- Panthéon-Sorbonne.

ABALLAGH, M & DJEBBAR, A. (1987) « Découverte d'un écrit mathématique d'al-Ḥaṣṣār (XIIᵉ s.) : le Livre I du Kāmil ». *Historia Mathematica, 14*, 147-158.

BOUZARI, A. (2008) *La géométrie des coniques dans la tradition de l'Occident musulman à travers le Kitāb al-Istikmāl [Livre de l'accomplissement] d'al Mu'taman (m1085)*. Thèse de Doctorat, Université de Lille 1.

BOUZARI, A. (2009) « Les coniques en Occident musulman entre le XIe et le XIVe siècle ». *LULL, 32(70),* 233-255.

DJEBBAR, A. (1987) « Algorithmes et optimisation dans les mathématiques arabes ». En: M. Amara, N. Boudriga & K. Harzallah (eds.) *Actes du 1ᵉ Symposium International de* *l'ICOMICD sur Informatics and the teaching of mathematics in developing countries* (Monastir, 3-7 février 1986). Tunis, pp. 185-194.

DJEBBAR, A. (1990) *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb médiéval (IXe - XVIe siècles), Contribution à l'étude des activités scientifiques de l'Occident musulman.* Thèse de Doctorat, Université de Nantes- Université de Paris-Sud.

DJEBBAR, A. (1993) « Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI[e] siècle: al-Mu'taman et Ibn Sayyid ». Colloque International sur "*Les Mathématiques autour de la Méditerranée jusqu'au XVII[e] siècle*" (Marseille-Luminy, 16-21 Avril 1984). En: M. Folkerts & J.P. Hogendijk (eds.): *Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard*. Amsterdam-Atlanta, 84-91.

DJEBBAR, A. (1995) « La contribution mathématique d'al-Mu'taman et son influence hors d'al-Andalus ». En: J. Cassinet (ed.) *Huit siècles de mathématiques en Occitanie, de Gerbert et des Arabes à Fermat*. Toulouse, C.I.H.S.O., 35-46.

DJEBBAR, A. (1997) « La rédaction de l'Istikmāl d'al-Mu'taman (XI[e] s.) par Ibn Sartāq un mathématicien des XIII[e]-XIV[e] siècles ». *Historia Mathematica, 24,* 185-192.

DJEBBAR, A. (1998a) *Contribution à l'étude des activités mathématiques dans l'Occident musulman (IX-XVIe S).* Habilitation à diriger des recherches, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales.

DJEBBAR, A. (1998b) « La tradition arithmétique euclidienne dans le Kitāb al-istikmāl d'al-Mu'taman et ses prolongements en Andalus et au Maghreb ». En : *Actes du 5[e] Colloque Maghrébin sur l'Histoire des Mathématiques Arabes* (Tunis, 1-3 Décembre 1994). Tunis, A.T.S.M., 62-84.

DJEBBAR, A. (2005) « Ar-Risāla fī t-taksīr li Ibn [c]Abdūn, shāhid [c]alā al-mumārasāt as-sābiqa li t-taqlīd al-jabrī al-[c]rabī [L'épître sur le mesurage d'Ibn [c]Abdūn, un témoin des pratiques antérieures à la tradition algébrique arabe] ». *Suhayl, 5,* 7-68.

GHURBĪ (al-) *Takhṣīṣ uwlī l-albāb fī sharḥ talkhīṣ a[c]māl al-ḥisāb* [Spécialisation des hommes de cœur dans le commentaire de l'abrégé des opérations du calcul]. Ms. Alger, B.N, n° 2712.

GUERGOUR, Y. (2006) *La géométrie euclidienne chez al-Mu'taman Ibn Hūd (m.1085) : Contribution à l'étude de la tradition géométrique arabe en Andalus et au Maghreb*. Thèse de Doctorat, Université d'Annaba.

HARBILI, A. (1997) *L'enseignement des mathématique à Tlemcen au XIVe siècle à travers le commentaire d'al-[c]Uqbānī(m.1408) au Talkhīṣ d'Ibn al-Bannā(m.1321).* Magister d'Histoire des Mathématiques, E.N.S d'Alger.

HARBILI (2005) « Quelques procédés d'approximation dans les écrits mathématiques maghrébins des XIIe-XIVe siècles ». En: *Actes du 7[ième] colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes* (Marrakech, 30 mai – 1[e] juin, 2002). Marrakech, E.N.S, Imprimerie al-Wataniya, vol. 1, pp. 157-199.

HARBILI (2006) « Le Takhṣīṣ d'al-Ghurbī : Un commentaire inédit du Talkhīṣ d'Ibn al-Bannā ». En: *Actes du huitième colloque meghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes* (Tunis, 18-20 Décembre 2004). Publication de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, 199-216.

ḤASSĀR (al-) *al-Kāmil fī ṣinā[c]at al-[c]adad* [(Le (livre) complet dans la science du nombre]. Ms. Marrakech, n° 313.

ḤASSĀR (al-) : *Kitāb al-Bayān wa t-tadhkār* [Le livre de la démonstration et de la remémoration]. Ms. Rabat, n° 917Q.