GEOMETRÍAS EN EL ARTE: LA DIVINA PROPORCIÓN Y LA PROPORCIÓN CORDOBESA

Geometries in art: the divine proportion and the Cordovan proportion

Cándido Martín Fernández
Universidad de Cádiz
ORCID: 0000-0002-3225-8060

Resumen

Desde Euclides se ha contemplado que la media y extrema razón, la razón áurea, o *divina proporción* que diría Luca Pacioli, es el canon por excelencia de la belleza. Son muchos los estudios que se han realizado tratando de apoyar esta tesis. Sin embargo, en la segunda mitad del s. XX un nuevo estudio para confirmarlo desveló que en la ciudad de Córdoba dominaba una proporción hasta ese momento ignorada, no estudiada ni en el arte ni en la arquitectura. Rafael de la Hoz, arquitecto responsable de este descubrimiento la llamó proporción cordobesa o proporción humana. Una vez descubierta quedó claro que no era una peculiaridad de esta ciudad andaluza, sino que son muchos los momentos en los que se ha utilizado como canon de belleza, aunque no reclamada como tal.

Abstract

Since Euclid, it has been contemplated that the average and extreme ratio, known as the golden ratio or *divine proportion* according to Luca Pacioli, is the ultimate canon of beauty. Numerous studies have been conducted in an attempt to support this thesis. However, in the latter half of the 20th century, a new study emerged to confirm that in the city of Córdoba, a previously unknown proportion dominated, which had not been studied in either art or architecture. Rafael de la Hoz, the architect responsible for this discovery, referred to it as the Cordovan proportion or Human Proportion. Once discovered, it became evident that it was not a peculiarity unique to this Andalusian city, but rather, a canon of beauty that has been used on numerous occasions, albeit not explicitly acknowledged as such.

Palabras clave: Proporción cordobesa, Proporción humana, Razón áurea, Divina proporción, Rafael de la Hoz.

Key words: Cordovan Proportion, Human Proportion, Golden Ratio, Divine Proportion, Rafael de la Hoz.

Recibido: 19/07/2023 – Aceptado: 10/11/2023
https://doi.org/10.47101/llull.2023.46.93.martin

1. Introducción

Cuando se realiza un hallazgo afortunado obtenido de manera fortuita lo denominamos serendipia[1]. En ciencia es habitual obtener resultados de este tipo, muchos de ellos en el ámbito de la medicina (por ejemplo, el descubrimiento de la penicilina por Fleming[2]), aunque podríamos mencionar ejemplos provenientes de cualquier campo[3]. El descubrimiento de la proporción cordobesa o proporción humana se produjo como consecuencia de la aceptación de una premisa, la del hecho de que si estéticamente debía buscarse una proporción en el ámbito arquitectónico no debía ser otra que la del canon de la máxima belleza, la divina proporción o proporción áurea, y si esa búsqueda se realizaba en la ciudad de Córdoba aún más.

La mención a la ciudad de Córdoba es esencial en tanto que fue en esta ciudad en la que desde el s. IX se estudian y editan[4] los *Elementos* de Euclides, obra en la que se introdujo por primera vez el principio de media y extrema razón, es decir, la proporción áurea. Por ello sería fácil entender que encontrar en sus edificios el uso de esta proporción sería esperable y que, por extensión, sus habitantes estarían acostumbrados a estas proporciones como algo natural del entorno.

Bajo estas premisas en 1944 la entonces Universidad de Madrid, hoy Universidad Complutense de Madrid, quiso demostrar que el uso de la proporción áurea en la arquitectura había sido un uso constante a lo largo de la historia. Para ello concibió un experimento seleccionando una ciudad con una larga tradición y que además estaba ligada a los *Elementos* de Euclides. Todo hacía pensar que las culturas que habían pasado por la ciudad de Córdoba habrían utilizado de modo sistemático dicha proporción, ya fueran los romanos, los árabes, los cristianos o los judíos. Dicho estudio bebía de las fuentes del ya realizado en 1876 por Gustav Fechner[5] con el único propósito de mostrar que la proporción áurea era el patrón

1. La palabra serendipia proviene del término inglés serendipity, creado en 1754 por el escritor Horace Walpole. Fue como consecuencia de la impresión que le produjo la lectura del cuento *Los Tres Príncipes de Serendip*, que forma parte del libro de *Las mil y una noches*. https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwjMxKaxzsjwAhXmzIUKHQLxAu4QFjAAegQIAxAD&url=https%3A%2F%2Fwww.textos.info%2Fanonimo%2Flos-tres-principes-de-serendip%2Fpdf&usg=AOvVaw3lAWitF79KeBGhmIZ3OXs1 [Consulta: 06/06/2023].
2. En 1928, mientras realizaba una investigación advirtió que en una de las placas con las que había estado trabajando y que olvidó eliminar, se había cultivado una bacteria denominada *Staphylococcus aureus*. A su lado, un hongo paralizaba el crecimiento de la bacteria gracias a una sustancia que producía su muerte. Este hongo, de la especie *penicillium*, posiblemente procedía de uno de los laboratorios cercanos, donde se trabajaba para combatir ciertas alergias. Sin una intencionalidad previa obtuvo uno de los grandes descubrimientos de la medicina. El descubrimiento del LSD, la viagra, el marcapasos, etc., tuvieron recorridos similares.
3. Podríamos mencionar el principio de Arquímedes, el daltonismo, el descubrimiento de América o el horno microondas, entre otros muchos.
4. Para un análisis detallado de las ediciones árabes de los *Elementos* de Euclides véanse: Vernet, J. [1999, 178-185], o Vega, L. *Introducción general* a Euclides, *Elementos* [1991, 129-133].
5. Gustav Theodor Fechner (1801-1887) estudió Medicina en la Universidad de Leipzig (Alemania), posteriormente sería profesor de Física en esta misma universidad. Considerado el fundador de la Psicofísica (esto es la representación mental de una suerte de relación entre las modificaciones de los estímulos por un lado y las modificaciones de las sensaciones por el otro), con la que pretendía resolver el problema mente-cuerpo. Estos

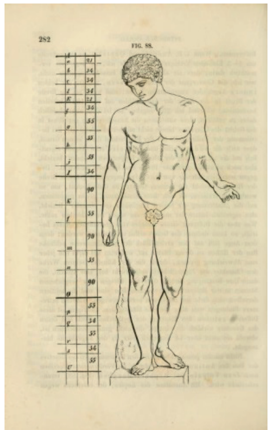


Figura 1. Proporciones áureas en el cuerpo humano [Zeising, Adolf, 1854, 282].

absoluto de belleza[6]. La obra de Fechner muestra una evidente influencia por parte de Adolf Zeising, quien en 1854 publica su *Neue Lehre Von Des Proporcionen Des Menschlichen Korpers,* en la que postula la posibilidad de una ley única, universal, un canon estético, un estudio sobre las proporciones del cuerpo humano, pero desde una perspectiva distinta, lo realiza desde un punto de vista estético, que sería mostrado en sus obras *Aesthetische Forschungen* (1855) y *Die Metamorphosen in den Verhältnissen der Menschlichen Gestalt* (1859). Estas obras

sólo serían dos aspectos diferentes de una misma realidad. Introduce estudios cuantitativos para el análisis de los problemas psicofísicos.

6. En su libro *Vorschule der Aesthetik*, en el capítulo XIV Verschiedene Versuche, eine Grundform der Schönheit aufzustellen. Experimentale Aesthctik. Goldner Schnitt und Quadrat, analiza el experimento realizado a 347 personas para que propusieran cuál de las figuras rectangulares mostradas les parecía más bella, el resultado fue el siguiente:

Tabelle über die Versuche mit 10 Rechtecken.

(V Seitenverhältniss, Z Zahl der Vorzugsurtheile, z Zahl der Verwerfungsurtheile, m. männlich, w. weiblich.)

V	Z		z		procent Z	
	m.	w.	m.	w.	m.	w.
$\frac{1}{1}$ □	6,25	4,0	36,67	31,5	2,74	3,36
$\frac{6}{5}$	0,5	0,33	28,8	19,5	0,22	0,27
$\frac{5}{4}$	7,0	0,0	14,5	8,5	3,07	0,00
$\frac{4}{3}$	4,5	4,0	5,0	1,0	1,97	3,36
$\frac{29}{20}$	13,33	13,5	2,0	1,0	5,85	11,35
$\frac{3}{2}$	50,91	20,5	1,0	0,0	22,33	17,22
$\frac{34}{21}$ ⊙	78,66	42,65	0,0	0,0	34,50	35,83
$\frac{23}{13}$	49,33	20,21	1,0	1,0	21,64	16,99
$\frac{2}{1}$	14,25	11,83	3,83	2,25	6,25	9,94
$\frac{5}{2}$	3,25	2,0	57,21	30,25	1,43	1,68
Summa	228	119	150	95	100,00	100,00

Figura 2. Fragmento extraído de Gustav Fechner [1876, 195].
El rectángulo elegido como el más bello fue el de proporción 34/21, el más cercano a la sección áurea.

estudian las proporciones humanas contemplando el cuerpo como algo vivo, que crece y varía sus medidas, no solo en altura sino las proporciones entre las diferentes partes del cuerpo, y como dice la segunda parte del título de esta última obra, *von der Geburt bis zur vollendung des Längenwachsthums* (desde el nacimiento hasta la finalización del crecimiento en altura).

Con estos antecedentes en los que las investigaciones confirmaban que la razón o proporción áurea resultaba más atractiva al ojo humano, se afrontó como decíamos, el estudio de la entonces llamada Universidad Central de Madrid para mostrar la atemporalidad de la razón áurea y su presencia en la ciudad de Córdoba. Recordemos que hasta 1535 no aparecería el texto griego de los *Elementos* de Euclides, por lo que hasta ese momento sólo se había dispuesto de las traducciones árabes y las versiones latinas vertidas desde el árabe. La arquitectura europea conocería la *divina proporción* a partir de la obra[7] de Luca Pacioli[8], esto permite entender que la arquitectura pre-renacentista cordobesa mostraría su estrecha relación con dicha estética. Sin embargo, los resultados del estudio fueron un fracaso absoluto, tras estudiar minuciosamente la arquitectura cordobesa se llegó a la conclusión de que dicha proporción estaba sólo presente en Córdoba de una manera testimonial.

> Quedaron pulverizados todos los apriorismos y con ellos la presunta universalidad del principio de la media y extrema razón. Nuestro proyecto fue cancelado [de la Hoz, 1995, 70].

Las palabras de Rafael de la Hoz muestran la debilidad de la premisa utilizada para el estudio. Sin embargo, ya hemos mencionado que estaba avalado por muchos otros anteriores, e incluso utilizaba un test ya usado por la Yale University, que retomaba el trabajo de Fechner[9].

2. La razón áurea

Buscar los orígenes de cuándo, quién(es) y cómo establecieron que un determinado canon de belleza era superior a cualquier otro nos obligaría a adentrarnos en terrenos especulativos, en valoraciones imprecisas, y al uso de fuentes poco –o al menos no demasiado- fiables. El problema de la belleza aparece en Platón en muchos de sus diálogos y, sin embargo, nunca se ocupó específicamente de las cuestiones estéticas, estas aparecen ligadas a las cuestiones metafísicas o éticas. En el *Banquete* defendía que la belleza era algo por lo que merecía la pena vivir, pero en el sentido griego de la expresión, no sólo era algo material, sino que estaría vinculado a la virtud, a la verdad, a lo social. Esta preocupación por la belleza aparecerá también en la *República* o en las *Leyes*, pero

7. Como bien dice Ciocci [2017, 129]:
   > El hilo conductor del tratado está constituido por las proporciones, esto es, por las relaciones que presiden la creación por Dios del cuerpo humano, así como la construcción de los edificios por la mano del hombre. La proporción es, por otra parte, el núcleo en torno al cual está organizado asimismo el restante material que compone el volumen de 1509.
8. Pacioli, también en 1509, además de la *Divina Proporción*, publicó la tercera edición impresa de los *Elementos* de Euclides. Estaba basada en la versión de Giovanni Campano de Novara (siglo XIII), efectuada a partir de la traducción del árabe al latín por parte de Adelardo de Bath (siglo XII). Las dos ediciones impresas anteriores fueron las del tipógrafo Erhard Ratdolt, impresa en Venecia en 1482, y la de Bartolomeo Zamberti, también en Venecia, en 1505.
9. Cfr. Federico, C., Díaz, N. & Mercader, M.A., [2017, 2].

será en *Hipias Mayor* donde el diálogo se centrará en "la esencia que debe subyacer a todas las cosas bellas para que sean bellas[10]". Y estas no serán otras que: lo útil, lo provechoso, lo capaz de hacer algún bien, lo que produce placer a la vista y a los oídos [cfr. *Hipias Mayor*, 297a -298a, 429-430]. Nuestro pensamiento moderno es el que establece que la belleza sólo pertenece al ámbito de la estética, mientras que a la ciencia se le asigna la certeza, y el bien a la ética[11].

2.1. Euclides. Extrema y media razón

En los *Elementos* de Euclides no nos encontraremos ninguna referencia a la belleza en ninguna de sus posibles manifestaciones, sin embargo, a lo largo del texto nos encontraremos con lo que desde Pacioli llamamos divina proporción. El primer uso conocido del adjetivo áureo, dorado, o de oro, para referirse a este número lo hace el matemático alemán Martin Ohm, (hermano del célebre físico Georg Simon Ohm), en la segunda edición de 1835 de su libro *Die Reine Elementar Matematik*. Ohm escribe en una nota al pie:

Dieße Zertheilung einer beliebigen Linie r in 2 solche Theile, nennt man wohl auch den goldenen Schnitt; auch fragt man in dießem Falle zuweilen: die Linie r werde in stetige Proportion getheilt[12] [M. Ohm, 1835, 194].

A pesar que la forma de escribir sugiere que el término ya era de uso común para la fecha, el hecho de que no lo incluyera en su primera edición sugiere que el término pudo ganar popularidad alrededor de 1830 y de ahí que emplee en esta edición la expresión "goldenen Schnitt", expresión retomada del poeta romano Horacio[13] "*aurea mediocritas*". Las denominacio-

10. Introducción a Platón [*Hipias Mayor*, 1981, 399].
11. El texto de Platón que mencionamos, *Hipias Mayor*, permite entender que la idea de belleza (*kalon*) utilizada por los griegos es muy diferente a la nuestra. Como dice De Bravo Delorme:

    > Aquí el significado de la palabra *kalon* se hace ciertamente ambiguo para nuestro modo de pensar [Kosman, 2010, 341-357]. Es más, para un lector moderno el asunto parece oscurecerse cuando vemos que Sócrates e Hipias pueden acordar en algún momento del diálogo que lo *kalon* puede resultar útil y provechoso. Esto es un embrollo, por cierto, si tenemos presente que la belleza es, según Kant, algo que produce un agrado desinteresado, lo cual implica que todo objeto bello resulta bello sin importar su provecho [Kant, 2006, 128ss]. Pese a ello, lo *kalon* para el pensamiento griego no es simplemente un epifenómeno del ser, pero tampoco el bien es un accesorio de lo *kalon*. En efecto, específicamente para Platón no sólo el bien y la belleza se aproximan [Barney, 2010, 363-377], sino también, como sugiere Keats, la belleza y la verdad.

    Esa compartimentación que asumimos hay que rastrearla en las Críticas de Kant, las cuales hay que obviarlas para poder aproximarnos a los textos clásicos y entender que la belleza puede ser algo relacionado con el placer visual o auditivo, pero que no es ajeno a aquello que nos pueda resultar útil, provechoso y que pueda responder a lo cuantitativo, no sólo a lo cualitativo.
12. Que traduciríamos como: Esta división de una línea arbitraria 'r' en dos partes se llama a veces proporción áurea; también, en este caso, se enuncia como: la línea 'r' se divide en una proporción continua.
13. Esta referencia a Horacio por parte de Ohm no sería del todo precisa, puesto que Horacio planteaba la necesidad de huir de extremos y encontrar en el punto medio la medida justa frente a los opuestos. Aparece esta expresión en las *Odas* de Horacio [2007, libro II, Oda X, 340]:

    > Mejor vivirás, Licinio, si no buscas siempre el mar abierto, ni —por prudente temor a la borrasca— te arrimas demasiado a la insegura orilla. **Quien prefiere el término medio, que vale lo que el oro**, se libra, seguro, de las miserias de una casa arruinada; y se libra, sobrio, de un palacio que le valga envidias. El pino grande es el que los vientos más azotan, más dura es la caída de las torres altas, y es en la cima de los montes donde hiere el rayo.

Esta es la referencia usual de la virtud peripatética, la *aurea mediocritas*.

nes con las que actualmente nos referimos a esta proporción tampoco las encontraremos en el texto de Euclides. Por tanto, sólo cabe encontrar las referencias a la “extrema y media razón”.

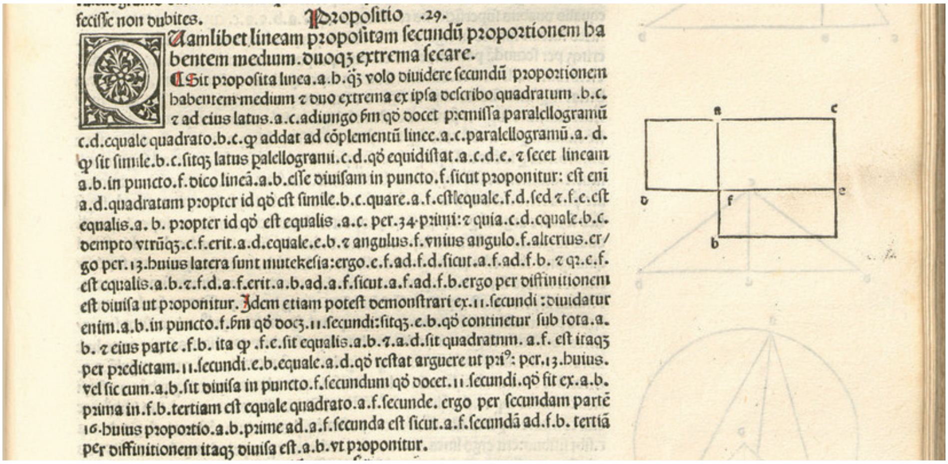

feciſſe non dubites. Pꝛopoſitio .29.
Quamlibet lineam pꝛopoſitam ſecundū pꝛopoꝛtionem habentem medium. duoqꝫ extrema ſecare.
Sit pꝛopoſita linea.a.b.qꝫ volo diuidere ſecundū pꝛopoꝛtionem habentem medium ⁊ duo extrema ex ipſa deſcribo quadratum .b.c. ⁊ ad eius latus.a.c.adiungo ſm qđ docet pꝛemiſſa paralellogramū c.d.equale quadrato.b.c.ꝙ addat ad cōplementū linee.a.c.paralellogramū.a. d. ꝙ ſit ſimile.b.c.ſitqꝫ latus palellogrami.c.d.qđ equidiſtat.a.c.d.e. ⁊ ſecet lineam a.b.in puncto.f.dico lineā.a.b.eſſe diuiſam in puncto.f.ſicut pꝛoponitur: eſt eni a.d.quadratum pꝛopter id qđ eſt ſimile.b.c.quare.a.f.eſt equale.f.d.ſed ⁊.f.e.eſt equalis.a. b. pꝛopter id qđ eſt equalis .a.c. per.34.pꝛimi: ⁊ quia.c.d.equale.b.c. dempto vtrūqꝫ.c.f.erit.a.d.equale.e.b.⁊ angulus.f.vnius angulo.f.alterius.ergo per.13.huius latera ſunt mutekeſia:ergo.e.f.ad.f.d.ſicut.a.f.ad.f.b. ⁊ qꝛ.e.f. eſt equalis.a.b.⁊.f.d.a.f.erit.a.b.ad.a.f.ſicut.a.f.ad.f.b.ergo per diffinitionem eſt diuiſa ut pꝛoponitur. Idem etiam poteſt demonſtrari ex.11.ſecundi :diuidatur enim.a.b.in puncto.f.ſm qđ docꝫ.11.ſecundi:ſitqꝫ.e.b.qđ continetur ſub tota.a. b. ⁊ eius parte .f.b. ita ꝙ .f.e.ſit equalis.a.b.⁊.a.d.ſit quadratum. a.f. eſt itaqꝫ per pꝛedictam.11.ſecundi.e.b.equale.a.d.qđ reſtat arguere ut pꝛiꝰ: per.13.huius. vel ſic cum.a.b.ſit diuiſa in puncto.f.ſecundum qđ docet.11.ſecundi.qđ fit ex.a.b. pꝛima in.f.b.tertiam eſt equale quadrato.a.f.ſecunde. ergo per ſecundam partē 16.huius pꝛopoꝛtio.a.b.pꝛime ad.a.f.ſecunda eſt ſicut.a.f.ſecundā ad.f.b. tertiā per diffinitionem itaqꝫ diuiſa eſt.a.b.vt pꝛoponitur.

Figura 3. Fragmento de la proposición VI.29 de los *Elementos* en la edición de E. Ratdolt [Euclides, 1482, 101]. Esta proposición es la VI.30 en la edición de la BCG [Euclides, 1994, 103-104].

En el texto de los *Elementos* de Euclides nos encontramos con el fundamento geométrico de lo que desde Pacioli se llamará razón áurea, en la proposición II.11: “Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante” [Euclides, 1991, 284-285]. Euclides construye en esta proposición un cuadrado *ABCD* (véase la figura 4), de lado *AB* y divide el lado *AD* en dos partes iguales mediante el punto *E*. Traza el segmento *EB* y prolonga el segmento *DEA* hasta *F*, de manera que *EB* sea igual a *EF*. A partir de *AF* construimos un cuadrado *AFGH*. Como dice Euclides: “la recta dada *AB* ha sido dividida en *H* de modo que hace el rectángulo *HBCI* igual al cuadrado de *AFGH*” [véase Euclides, íbidem].

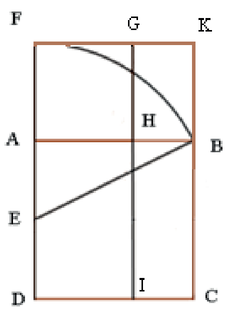


Figura 4. Dibujo de la Proposición II.11, en *Elementos*.

Si $AE = ED = 1$, entonces $AB = 2$, y aplicando el Teorema de Pitágoras obtenemos que $EB = EF = \sqrt{5}$, luego, $AH = AF = \sqrt{5}-1$ y $AH^2 = 2(3-\sqrt{5})$. Por otra parte,

$HB = AB-AH = 2-(\sqrt{5}-1) = 3-\sqrt{5}$, así que $HI \cdot HB = AH^2$.

Más adelante, en la proposición VI.30 [EUCLIDES, 1994, 103-104] plantea "Dividir una recta finita dada en extrema y media razón". La recta se divide en dos partes tales que la razón entre la total y la mayor es igual a la existente entre la parte mayor y la menor. En un segmento de longitud unidad tenemos

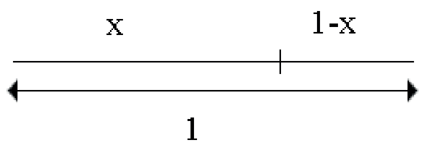


Figura 5. División de un segmento en media y extrema razón.

Euclides plantea la proporción $\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$, de donde $x^2 + x - 1 = 0$, ecuación de 2º grado de soluciones $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, tomando la positiva, la primera razón de la proporción es:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

Se lee como fi[14] y que como ya hemos dicho, ahora lo denominamos número áureo. Es un número irracional de valor aproximado ≈ 1.618…, solución positiva de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$

Volviendo a la proposición II.11 de *Elementos* (figura 4), se verifica $DF = 1+\sqrt{5}$ y los lados del rectángulo *FKCD* forman razón áurea:

$$\frac{DF}{DC} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

14. El símbolo φ se utiliza en homenaje al escultor griego Fidias, cuyas obras se consideraban lo más cercano a la perfección estética. Hasta 1900 se utilizaba la letra *T* del griego *τομή*, que traduciríamos por sección o corte, y sería en esta fecha cuando el matemático Mark Barr introduciría el uso de la letra φ , como decimos, en homenaje a *Φειδίας*. Así lo afirma Yvo JACQUIER [2017, 28] recientemente:

> Much later in the twentieth century, in the years 10, the critic and British fencer Theodore Andrea Cook (1867-1928) decides with a friend a US mathematician named Mark Barr to propose the notation *φ* as the mathematical symbol of the golden ratio, as a tribute to Phidias. … is reported by Cook in his book *The Curves of Life* in 1914.

Se dice por ello que el rectángulo *FKCD* es áureo. También el rectángulo *AFKB* es áureo porque sus lados están en la misma razón

$$\frac{AB}{AF} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \varphi$$

luego es semejante al rectángulo $FKCD$.

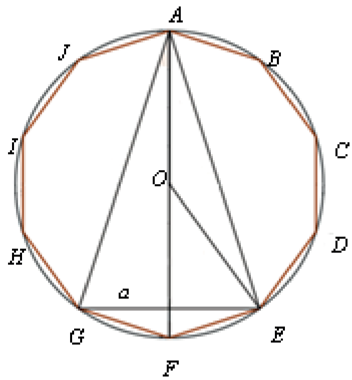
Tendremos que esperar hasta el último libro de los *Elementos*, el libro XIII, para que Euclides, en relación con las propiedades de los lados de los polígonos regulares inscritos en un círculo establezca tres proposiciones sobre ello. En la proposición XIII.8 nos dice:

> Si en un pentágono equilátero y equiangular, unas rectas subtienden dos ángulos sucesivos, se cortan entre sí en extrema y media razón y sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono[15].

Estamos ante el *Pentagrama místico pitagórico*[16] que es introducido por Euclides en la proposición IV.11, "Inscribir un pentágono equilátero y equiángulo en un círculo dado" y que para su construcción se apoyaba en la anterior, en la proposición IV.10, en la que construye un triángulo isósceles que tiene los ángulos iguales dobles que el ángulo desigual, es decir, construye un triángulo áureo [Euclides, 1991, 353-355] que, como sostiene María Luisa Puertas[17] "existen razones para conjeturar que la construcción del triángulo de esta proposición y su relación con el pentágono regular fue un descubrimiento de los pitagóricos". Ya en el *Timeo* de Platón a la hora de utilizar los sólidos regulares para estructurar los elementos del Cosmos el personaje de *Timeo*, probablemente pitagórico, destaca que al triángulo isósceles "le tocó en suerte una naturaleza única", "el más bello para la composición de los elementos" [Platón, *Timeo*, 1992, 207].

En la proposición XIII.9 nos dice que los lados del hexágono y el decágono inscritos en el mismo círculo se yuxtaponen de forma áurea [Euclides, 1996, 326-328] y en el XIII.10 que "si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del pentágono es igual a los (cuadrados) de los (lados) del hexágono y el decágono inscritos en el mismo círculo" [Euclides, 1996, 328].

15. Euclides [1996, 325].
16. El pentagrama místico no fue algo exclusivo de la escuela pitagórica es posible rastrearlo en restos arqueológicos de la cultura mesopotámica, apareciendo posteriormente en monedas e ilustraciones de la cultura judía, romana y en distintas monedas griegas halladas en Metaponto (440 a.C.), Melos (420 a.C.) o Pitane (350 a.C.). La escuela pitagórica pudo haber conocido el pentagrama místico de la cultura mesopotámica y ellos lo han transmitido a otros pueblos del mediterráneo.
La relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular es φ. Y asociamos el pentagrama místico a los pitagóricos, enfrentados a números irracionales que cuestionan el uso de la aritmética frente a la geometría. La esencia de las cosas eran los números y estas figuras sólo podrían pertenecer a lo místico pues no respondían al *ἀρχή* pitagórico [cfr. Extremiana Aldana, J.L. *et al.*, 2005, 159-160].
17. Puertas Castaño, M.L., Traducción y notas a *Elementos* de Euclides [1991, 355].



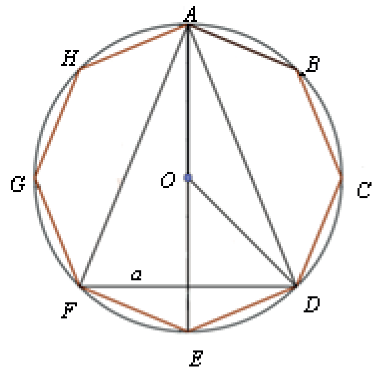


Figura 6. A la izquierda el triángulo áureo y a la derecha el triángulo cordobés. El áureo se caracteriza por tener un ángulo de 36° (y sus ángulos iguales dobles), mientras que el cordobés lo tiene de 45°.

2.2. Pacioli. La divina proporción

De las diferentes obras que Pacioli escribió a lo largo de su vida sólo publicó dos, la *Summa de arithmetica geometría proportioni et proportionita*[18], publicada en Venecia en 1494; y *De divina proportione*, publicada también en Venecia en 1509, también fue impresa por el tipógrafo Erhard Ratdolt[19].

Mientras la *Summa* es una obra mucho más contundente, más enciclopédica, que trata de abarcar una gran parte del conocimiento matemático, la *Divina proportione* tiene claramente un objeto muy diferente, desde su extensión –mucho más reducida- hasta su contenido. En la *Divina Proportione* nos encontramos un Pacioli más místico, más filosófico, estaríamos ante un neoplatónico y neopitagórico en el que el orden cósmico se atiene a la estética que marca la geometría. De hecho, esa relación cosmogónica presente en el *Timeo* de Platón está presente en la primera parte del texto de Pacioli [PACIOLI, II, 69-70].

La premisa neopitagórica y neoplatónica nos abocará a través del tamiz teológico a ensalzar y enlazar la matemática a Dios; por tanto, no habrá mayor logro para el ser humano que

18. La importancia de esta obra radica en la gran circulación que tuvo, así como la influencia que ejerció en autores como Tartaglia o Cardano. Está considerada como uno de los grandes compendios de matemáticas del s. XV. La *Summa* comprende cinco partes; la primera y más extensa se ocupa de aritmética y álgebra, la segunda de la aplicación de ambas a la práctica comercial, la tercera de teneduría de libros, la cuarta de los distintos sistemas monetarios entonces en uso en Italia, y la quinta parte, que forma casi un tratado por sí mismo y cuyas páginas están numeradas separadamente, considera la geometría pura y aplicada.
19. Este impresor de origen alemán se trasladó a Venecia donde alcanzó una gran reputación como impresor de textos humanísticos. A él se deben las primeras portadas en las que es posible identificar una obra. En ellas aparece por primera vez el título, el autor, y debajo la fecha y los nombres de los impresores. También introdujo los grabados xilográficos en sus obras.

ser capaz de captar la conexión que puede hacerse entre el hacedor,[20] que diría Platón, y la geometría. Pacioli mantiene a las matemáticas como un principio fundamental, por encima de cualquier disciplina. De hecho, considera que las disciplinas griegas del *quadrivium*, el de los saberes exactos, deben ampliarse con la "perspectiva, arquitectura y cosmografía, y cualquier otra dependiente de éstas" [Pacioli, 74]. La postura de Pacioli está en sintonía con la preocupación de los pintores de la época que comienzan a relacionar la geometría y la visión, es decir, la perspectiva[21]. Esto se ratifica en las obras de Leonardo, Alberti, Piero Della Francesca, Botticelli, y tantos otros.

Pacioli sigue ampliamente los *Elementos* de Euclides para establecer la proporción relativa a las magnitudes y la irracionalidad de la misma, además introduce los nuevos saberes del álgebra que ya aparecían en la *Summa* para ejemplificar los casos de media y extrema razón referidos a longitudes numéricas concretas.

Su intento de relacionar "la media y extrema razón" de Euclides rebautizándolo como "Divina Proporción" ha trascendido hasta la actualidad y se ha convertido en la referencia fundamental de las proporciones arquitectónicas. Tan importante que esa búsqueda de belleza máxima se ha realizado tanto hacia atrás como hacia adelante.

2.3. La divina proporción en la arquitectura

Del mismo modo que la media y extrema proporción fue establecida antes que sus denominaciones de áurea o divina, su uso en el ámbito de la arquitectura también fue previo al de las denominaciones. La primera fuente de que disponemos respecto a las proporciones[22] en las construcciones nos la aporta Marco Vitruvio Polión [Vitruvio, *De Architectura*, 81-82].

Vitruvio pretende sustentar la explicación de que la disposición de los templos está basada en la búsqueda de simetrías que es la norma que deben mantener los arquitectos. Tiene claro que la simetría está sustentada en lo que los griegos llamaban analogía, que no es otra cosa que la proporción. Lo mismo que el cuerpo humano mantiene un equilibrio de simetrías y proporciones, la construcción de los templos debe tenerlos también [Vitruvio, 81]. Sin embar-

---

20. En el *Timeo* (28c) nos dice Platón: "Descubrir al hacedor [ποιητην] y padre [πατερα] de este universo es difícil, pero, una vez descubierto, comunicárselo a todos es imposible".
21. El capítulo III de la *Divina Proportione* es una apología de la perspectiva. Así nos dice que lo mismo que la música, que "contenta al oído, que es uno de los sentidos naturales, también la perspectiva contenta a la vista, la cual es tanto más digna cuanto que es la primera puerta del intelecto, … si aquella considera sus proporciones armónicas, también ésta considera las aritméticas y geométricas" [Pacioli, 74].
22. Vitruvio aplicó las proporciones del cuerpo humano al ámbito de la arquitectura, sin embargo, en el ámbito de la escultura ya existían antecedentes. El primero de los cánones sería el de Policleto (s.V a.C.), quien escribiría un tratado sobre las proporciones entre las partes del cuerpo, que no nos ha llegado, pero que es citado por Galeno. Posteriormente, a finales del periodo clásico griego, Praxíteles (s. IV a.C.) también llevó a cabo un canon matemático de las proporciones del cuerpo humano. Entre ambos hay algunas diferencias notables. El cuerpo de Praxíteles es más estilizado que el de Policleto, para Praxíteles la altura de la figura humana debía estar estructurada en ocho cabezas y no en siete como había propuesto Policleto. Praxíteles planteaba una belleza más ideal que real.

go, en ningún momento Vitruvio hará alusión ni a Euclides ni a la media y extrema razón. Tras la desaparición en el mundo clásico de la obra de Vitruvio tuvo que esperar hasta el Renacimiento para que fuera rescatada. La primera referencia de una traducción de la *Arquitectura* de Vitruvio se debió a Petrarca (1304-1374), pero no será hasta 1470 cuando nos encontremos con una traducción parcial realizada por Francesco di Giorgio Martini[23] (1439-1502) que elaboró la primera ilustración del hombre de Vitrubio de la que hay referencia.

Figura 7. Francesco di Giorgio Martini representó en 1480 la imagen descrita por Vitrubio.
Fuente: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FGMartini1.jpg>

Pero será la representación de Leonardo da Vinci la que eclipsará a todas las demás. El *Hombre de Vitruvio* de Da Vinci[24] es un pequeño dibujo realizado sobre una superficie de 34,4 cm x 25,5 cm, en que representa un hombre con brazos y piernas extendidas en dos posiciones, enmarcado dentro de un círculo y dentro de un cuadrado.

23. El mismo Giorgio Martini, inspirado en la obra de Vitruvio, llega a proponer la relación que puede darse entre las proporciones del cuerpo humano con las del trazado urbano de una ciudad, esta obra titulada *Trattato di architettura civile e militare* apareció en 1480.
24. Actualmente puede verse en la Galería de la Academia de Venecia.

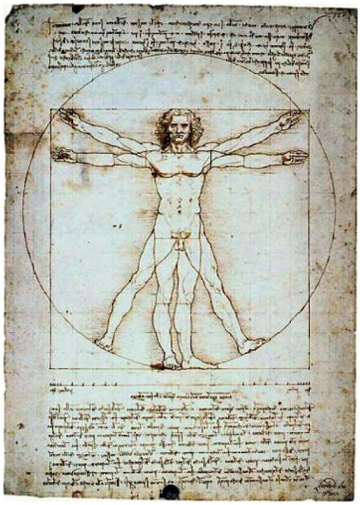


Figura 8. El *Hombre de Vitruvio,* 345,00 x 246,00 mm. Leonardo da Vinci, 1490.
Fuente: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Anatomia_homem_leonardo.jpg>

En el texto que aparece junto a la imagen podemos leer que "Vitruvio el arquitecto, dice en su obra sobre arquitectura que la naturaleza distribuye las medidas del cuerpo humano". En ninguno de los dos autores nos vamos a encontrar la mención a Euclides y a su "media y extrema razón". Sin embargo, un análisis matemáticamente detallado del dibujo de Leonardo da Vinci no dejaría ninguna duda que la imagen construida refleja nítidamente la idea de lo que Pacioli llamará divina proporción [Fuster Ruiz, R. & Aguadé Torrell, J, s/f, 51].

Da Vinci sintetiza en una lámina la idea renacentista antropocéntrica en la que el hombre es el centro del mundo y que además se convierte en la medida de la naturaleza. Aún podría irse más lejos si quisiéramos ver en el dibujo de Da Vinci la solución a uno de los tres problemas clásicos de la antigüedad[25], el de la cuadratura del círculo, que entroncaría con una parte importante de la matemática griega. Sin embargo, lo que sí es explícito en la lámina de Da Vinci es el seguimiento a Vitruvio, el hombre como unidad de medida y de proporción para la construcción. En el arquitecto romano constituía la base para la construcción de los templos, en la obra de Da Vinci refleja la belleza de las proporciones que ya estaban en los edificios de su época.

2.4. El nacimiento del mito áureo

Será en el siglo XIX donde nos encontraremos con la emergencia del mito en torno a la divina proporción. El romanticismo surgió hacia finales del siglo XVIII y se extenderá a lo largo

25. Puede verse el trabajo de Martín, C., de Mora Charles, M.S. & Peñalba, M., [2008].

del XIX e impregnará casi todos los campos del conocimiento, entre ellos el de buscar en la arquitectura, la escultura, la pintura, etc., las cualidades estéticas de esta proporción. Ya hemos mencionado los trabajos de Adolf Zeising[26] quien postulaba una ley universal, como canon estético, en las proporciones del cuerpo humano, o los de Gustav Fechner, que intentó extender ese canon a cualquier objeto o construcción, convirtiéndolo en el patrón absoluto de belleza.

A partir de aquí se llevará a cabo una búsqueda de la presencia de la divina proporción en la naturaleza, y se buscará en el arte del pasado, la arquitectura, la escultura, la pintura, y se lograrán grandes ejemplos, entre ellos el Partenón, pero también las pirámides de Egipto[27], en la arquitectura religiosa con el pentagrama pitagórico presente en los rosetones, ya sea en la Catedral de Amiens, o en la Iglesia de Santa María de Lemgo en Alemania, el de Santo Domingo de Soria, la fachada occidental interior de la Catedral de León, la Catedral de Valencia, y tantos otros ejemplos que podríamos citar. También en la pintura, el Cristo crucificado de Velázquez o el Nacimiento de Venus de Boticelli.

Pero si ha habido una figura que ha sido determinante para engrandecer el mito de la proporción áurea a lo largo del siglo XX fue la del suizo Charles-Édouard Jeanneret, a quien conocemos por su seudónimo, Le Corbusier. Ha pasado a la historia de la arquitectura moderna como uno de los más influyentes del siglo XX por su filosofía renovadora, que utilizó las matemáticas y la geometría como pilares de su carrera. En sus edificios destaca la ortogonalidad, además del uso del hormigón armado, que permite mayor ductilidad a las piezas. Tras más de 20 años estudiando la proporción, Le Corbusier publicó en 1950 un ensayo que sería utilizado por sucesivas generaciones de constructores. *El Modulor, ensayo sobre una medida armónica a la escala humana aplicable universalmente a la arquitectura y a la mecánica*, este largo título define lo que es: un sistema de medidas proporcionadas a las magnitudes del cuerpo humano.

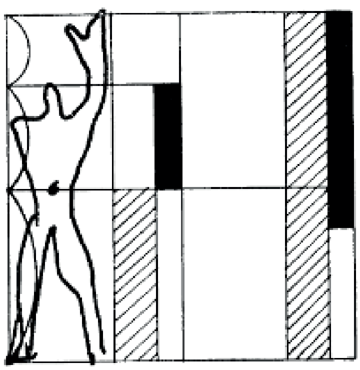


Figura 9. [Le Corbusier,1953, 52].

26. Cfr., por ejemplo, [Zeising, Adolf, 1854].
27. Podrían citarse muchos trabajos que siguiendo la línea del mito áureo han visto en la Gran Pirámide de Keops el uso de la proporción áurea. Podemos citar, por ejemplo, a György Doczi [1994]; sin embargo, nos parece mucho más acertada la propuesta que realizan Borut Jurcic Zlobec & Gustavo N. Rubiano [2016] de considerar una pura coincidencia aleatoria la aparición de φ, basada en una cuestión de seguridad y economía en la construcción.

Como nos dice el propio Le Corbusier:

> El Modulor es un aparato de medida fundado en la estatura humana y en la Matemática. Un hombre con el brazo levantado, da a los puntos determinantes de la ocupación de espacio —el pie, el plexo solar, la cabeza, la punta de los dedos estando levantado el brazo— tres intervalos que definen una serie de secciones áureas de Fibonacci; y, por otra parte, la Matemática ofrece la variación más sencilla y más fuerte de un valor: lo simple, el doble y las dos secciones áureas [Le Corbusier, 1953, 51-52].

Entre los edificios más emblemáticos y conocidos donde aplicó la razón áurea está el de la sede de la ONU en Nueva York. Consiste en un rectángulo áureo que, a su vez, tiene marcas distintivas que lo dividen de nuevo según la proporción áurea[28].

Figura 10. Edificio de Naciones Unidas en Nueva York.
Fuente: <https://www.flickr.com/photos/flickr4jazz/2724390955/>
<https://en.wikipedia.org/wiki/en:Creative_Commons>

28. Como nos dice Laura Chaparro en OpenMind:

> En 2016, cincuenta años después de su fallecimiento, la Unesco incluía su trabajo en la lista de Patrimonio de la Humanidad. En total, reconocía 17 espacios repartidos en siete países como testimonio de la invención de un nuevo modo de expresión de la arquitectura, en clara ruptura con sus formas anteriores.
>
> Entre ellas destacan la Unidad Habitacional de Marsella, la capilla de Notre Dame du Haut (Francia), el Museo Nacional de Bellas Artes de Occidente de Tokio (Japón), el complejo del Capitolio de Chandigarh (India). La Unesco subraya cómo en esta última construcción el arquitecto empleó el Modulor como sistema armónico de proporciones.
>
> La influencia global conseguida por el trabajo arquitectónico de Le Corbusier en cuatro continentes es un nuevo fenómeno en la historia de la arquitectura y demuestra su impacto sin precedentes, resalta el organismo. Una revolución arquitectónica que no se concibe sin la base geométrica [Laura Chaparro, 2018].

3. La proporción cordobesa

Hemos podido ver que desde que Pacioli elevó a tratamiento divino la extrema y media razón euclidiana no se ha cejado tanto en construir siguiendo esos parámetros, como en buscar, ya sea en la naturaleza como en las construcciones existentes, esa *divina proporción*. La hipótesis planteada por la entonces Universidad Central de Madrid se basaba en esta larga tradición. En Córdoba, ciudad en la que se recuperan los *Elementos* de Euclides debieran haber construido sus edificios mediante la proporción áurea, pero como ya hemos dicho, esa hipótesis no sólo no fue confirmada, sino que permitió que apareciera un resultado absolutamente inesperado.

Como nos dice Rafael de la Hoz[29], en la misma época -1944- la Universidad de Yale estaba realizando una investigación similar, consistente en pasar un test que confirmara la inclinación social hacia la proporción áurea. Ambos estudios reproducían, en gran medida, el ya realizado por Fechner en 1876.[30] Este trabajo se completó con un test histórico de arquitectura comprobando cómo había sido utilizado por los arquitectos.

La respuesta social fue sorprendente porque pulverizó todos los apriorismos. Pero ese resultado sobre la percepción del gusto estético social fue ratificado en el estudio arquitectónico. Rafael de la Hoz nos dice que:

> El resultado fue sorprendente:
>
> Excepto en algunos casos muy especiales, obra aislada de Ventura Rodríguez u otros arquitectos importados, no apareció la proporción armónica en ninguna traza relevante de la ciudad [de la Hoz, 1995, 70].

Poco tiempo después la Diputación de Córdoba solicitó a de la Hoz que preparara unas pruebas de aptitud para otorgar unas becas para estudiar arquitectura, ocasión que aprovechó para estudiar la sensibilidad estética de los candidatos y de nuevo el resultado era coincidente. Ni uno sólo de ellos dibujó un rectángulo áureo.

> Para mayor misterio se encontró que la mayoría había trazado uno, menos esbelto que el armónico con la proporción: lado mayor dividido por lado menor = 1,3 [*Ibid.*, 71].

La sorpresa del resultado les llevaría a repetirlo y confirmar que los resultados no habían sido casuales, sino que de nuevo se repetían. A partir de ahí se llevaría a cabo una investigación para entender por qué se obtenían estos resultados en Córdoba.

3.1. La geometría de la proporción cordobesa

Mientras la razón áurea es la relación entre el lado y el radio de un decágono regular [Bonell, 2000, 25; Huntley, 1970, 25] la razón cordobesa lo es entre el lado y el radio de un octógono regular, y su valor aproximado es:

---

29. [De la Hoz, 1995, 70].
30. Cfr. *supra*, nota 6. La diferencia entre los estudios de Fechner y el de la Universidad de Madrid era que mientras Fechner mostraba diferentes rectángulos ya construidos a los cordobeses se les pidió que los dibujaran ellos, esperando que se obtuviera el mismo resultado, obviamente.

$$c = \frac{r}{l} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \approx 1.306 \ldots$$

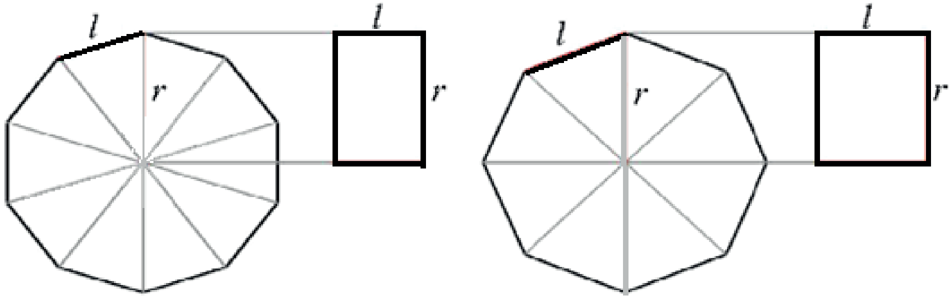


Figura 11. A la izquierda la figura del decágono regular de la que extraemos la razón áurea entre la relación del lado y el radio. A la derecha el octógono regular del que extraemos la razón cordobesa de la relación entre el radio y el lado.

Sin embargo, la razón cordobesa no ha sido la más conocida de las razones que el octógono ha proporcionado. Ya con anterioridad fue conocido el *n*úmero de *plata*[31] $q = d/l + \sqrt{2}$. Es una razón que aparece (ver figura 12) cuando en un octógono regular de lado *l* dibujamos la diagonal *d*, la razón entre la diagonal y el lado da como resultado este número metálico[32].

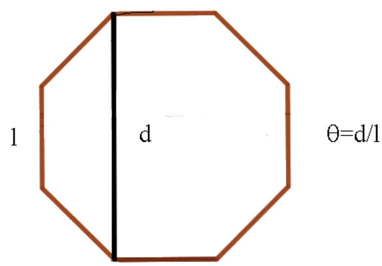


Figura 12. Número de plata en el octógono.

A diferencia de las razones metálicas, ya utilizadas varias de ellas en el mundo clásico, la razón cordobesa tiene fecha de descubrimiento, y es el mencionado de 1973 por Rafael de la

31. Dann Passoja nos recuerda que tanto el número de plata como el número áureo, aunque entonces no tuvieran estos nombres, eran bien conocidos en época griega y romana [Passoja, 2016, 2].
32. Los números metálicos (oro, plata, bronce, cobre, níquel, etc.) son una familia de números irracionales positivos, todos ellos gozan de propiedades comunes y están siendo de interés en investigaciones de sistemas dinámicos no lineales [Vera W. de Spinadel, 2003].

Hoz Arderius. Sólo a partir de ese momento se ha podido definir en qué consiste y estudiar dónde había sido utilizado, aunque esta es precisamente una tarea abierta, aún por hacerse. Poco a poco se ha hecho un hueco en los análisis de los trabajos de Arte y Arquitectura[33].

Un octógono inscrito en una circunferencia se basa, como el resto de polígonos regulares, en la división de la circunferencia en un número de partes iguales.

En la figura 13 hemos trazado dos diámetros perpendiculares entre sí que determinan los puntos 1-5 y 3-7, respectivamente. Después, trazamos las bisectrices de los cuatro ángulos de 90º formados por las diagonales trazadas, estas bisectrices determinarán sobre la circunferencia los puntos 2, 4, 6 y 8. Uniendo todos los puntos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8) obtendremos el octógono inscrito[34].

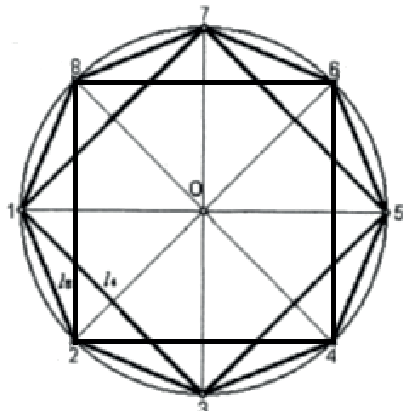


Figura 13. Construcción del octógono regular inscrito.

El octógono admite la construcción de un falso estrellado compuesto por dos cuadrados girados entre sí 45º, y la razón cordobesa está estrechamente vinculada al ángulo de 45º. El valor que hemos asignado el número cordobés, la razón entre el radio y el lado del octógono, se calcula aplicado el teorema del coseno al triángulo cordobés *AOB* de la figura 14, que resulta trazando la bisectriz del primer cuadrante, en el que $AO = r$ es el radio de la circunferencia y $AB = l$ es el lado del octógono regular inscrito en ella:

$$l^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos 45^\circ = r^2\left(2-\sqrt{2}\right) \Rightarrow c = \frac{r}{l} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

Geométricamente, aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo *AOC* resulta $CA = r\sqrt{2}$ y por simetría $OP = AP = CA/2 = r/\sqrt{2}$.

33. [Redondo Buitrago, Antonia & Iglesias, Encarnación, 2023].
34. De este modo de construcción del octógono puede deducirse que la construcción de un polígono de doble número de lados que uno dado sólo requiere trazar las bisectrices de los ángulos centrales del polígono dado y estas determinarán, sobre la circunferencia circunscrita, los vértices necesarios para la construcción.

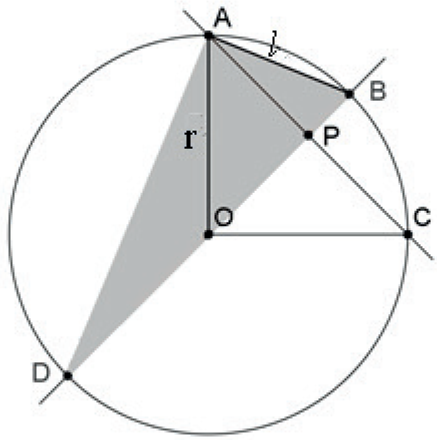


Figura 14. Construcción del triángulo cordobés.

Como *DAB* es recto, Euclides VI, 4 [1994, 62-63] da la proporción (con *AB*=*l*)

$$\frac{AB}{DB} = \frac{PB}{AB}$$

así que es $l^2 = DB \cdot PB = DP(OB - OP) = 2r\left(r - \frac{r}{\sqrt{2}}\right) = r^2(2 - \sqrt{2})$, luego

$$c = \frac{r}{l} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$$

La construcción del rectángulo cordobés es sumamente sencilla, basta con trazar la bisectriz del primer cuadrante de la circunferencia dibujada en la figura 14 para obtener sus lados, que luego se han de colocar en ángulo recto.

La proporción cordobesa puede ser codificada mediante el ángulo de 45º y puede modelizarse a través del triángulo isósceles [Redondo Buitrago, Antonia y Reyes Iglesias, Encarnación, 2023, 2]. El triángulo cordobés *ADF* de la figura 6 es semejante al central *ODE*, triángulo[35] que habíamos usado en la figura 11 para representar el número cordobés como *c*=*r*/*l*, así que tiene la proporción cordobesa

$$c = \frac{OD}{DE} = \frac{AD}{DF}$$

35. Si unimos dos triángulos cordobeses por su lado desigual construimos el diamante cordobés, figura muy presente en los mosaicos nazaríes de la Mezquita de Córdoba o en Medina Azahara, entre otros lugares.

3.2. Rafael de la Hoz Arderius y la proporción cordobesa

La búsqueda de la confirmación de una premisa, *a priori* sencilla, como fue la confirmación del uso de la razón áurea en la construcción cordobesa por el hecho de haber sido la ciudad depositaria a lo largo de la Edad Media del texto de Euclides, los *Elementos*, en los que se dedica un amplio y detallado espacio al estudio de la media y extrema razón, supuso un fracaso absoluto y contundente. Salvo excepciones muy contadas dicho uso no se había dado, Sin embargo, esta circunstancia llevó a buscar dentro de Córdoba qué sensibilidad estética era la dominante. Como relata el propio Rafael de la Hoz[36] [1973] lo más sorprendente fue que ninguno de aquellos estudiantes que habían sido seleccionados por sus cualidades y capacidades para estudiar Arquitectura dibujó el rectángulo áureo. Y para mayor intriga se encontró que la mayoría había trazado uno, menos esbelto que el armónico, con la proporción: lado mayor dividido por lado menor es igual a 1,3.

Esta circunstancia fue la que llevó a de la Hoz a buscar en el entorno cordobés la influencia recibida por los jóvenes que habían sido sometidos al test estético. Los resultados fueron apareciendo poco a poco y frente a la tradición de la razón áurea fueron apareciendo, primero en las esculturas de figuras humanas, una proporción similar a la representada por los jóvenes cordobeses. Entre ellas aparecen analizadas las figuras humanas del mosaico de Alcolea (fig. 15), así como diferentes esculturas romanas del Museo Arqueológico de Córdoba, o las figuras de Adán y Eva del sarcófago paleocristiano columnado de Huerta de la Reina (fig. 16). Estos resultados generaron la idea de una proporción humana, en la que el canon venía dado por unas proporciones más reales respecto a la figura humana que la dada por la representación del Hombre de Vitruvio.

Figura 15. Mosaico del Triunfo de Dionisos de la villa de Alcolea. Imagen de Museos de Andalucía.

36. Disponemos de dos textos, de contenidos muy similares, que recogen sendas conferencias de [DE LA HOZ, 1973 y 1995].

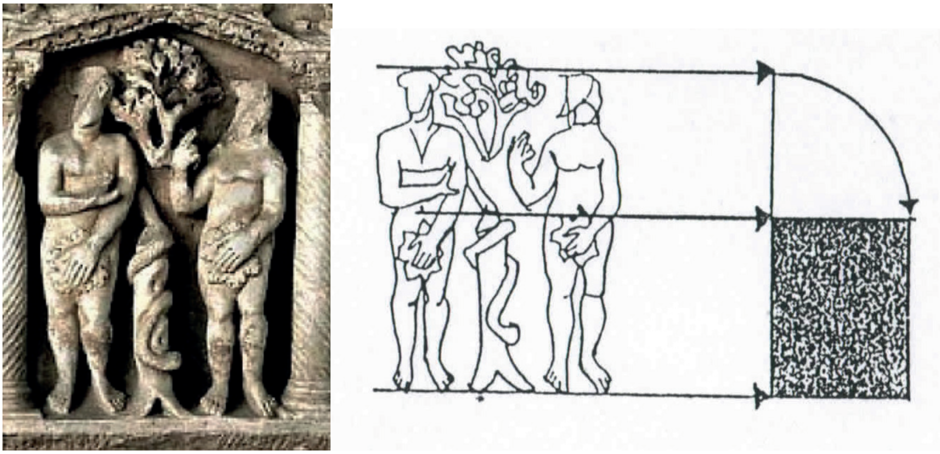


Figura 16. Escena de Adán y Eva en el Paraíso. Fragmento del sarcófago paleocristiano columnado de Huerta de la Reina (Córdoba). Imagen del Catálogo del Museo Arqueológico de Córdoba.

Pero la investigación no se quedó ahí, sino que, conocidas las características del rectángulo cordobés, de proporción humana, las miradas giraron en la búsqueda de las características constructivas cordobesas y ahí había un elemento en común: el octógono era una forma constructiva frecuente, seguramente por ser de trazado geométrico sencillo y porque además es una aproximación al círculo, pero sin curvas de difícil realización.

A partir de aquí comienzan a ser identificados los usos habituales en la construcción cordobesa de esta característica proporción. De la Hoz mencionará que fue la "solución constructiva de la bóveda cordobesa en la Mezquita", pero también en el Mihrab, el lugar más sagrado de la misma. Y de forma reiterada es usada en las medidas de la planta de la Mezquita, así como en sus arcadas o en las fachadas de Al-HakamII.

Podría parecer que fue propio de la cultura islámica cordobesa, pero siguió apareciendo en muchos más edificios: en la fachada de la Sinagoga de estilo Mudéjar, en la portada de la Casa del Indiano (o Casa de los Ceas), en la portada del Palacio de los Marqueses de la Fuensanta del Valle. Y también en los edificios cristianos: la fachada de la Iglesia de la Merced o la fachada de la Iglesia de Santa María de Aguas Santas. Todos ellos, insistimos, en la ciudad de Córdoba.

Puede decirse que la hipótesis inicial de la búsqueda del número áureo quedó rebatida, aunque en este caso sustituida por otra no mencionada hasta ahora ni en la geometría ni en el arte o en la construcción. Nacía así la constancia de una nueva proporción, la proporción cordobesa o proporción humana, presente en multitud de construcciones cordobesas y recurso artístico en el pasado, que había pasado inadvertido hasta mediados del siglo XX.

3.3. La proporción cordobesa más allá de Córdoba

No existen demasiados trabajos dedicados a la proporción cordobesa. Tema transversal que se desliza desde el interés que puede tener en la geometría al escultórico, arquitectónico, pictórico, etc., por su presencia en ellas. Nos encontramos, fundamentalmente, con análisis arquitectónicos buscando proporciones geométricas.

El interés por los resultados de Rafael de la Hoz es predominante, pero ese interés se ha centrado en realizar análisis por similitud respecto a los resultados obtenidos por él. La evidencia más clara es la búsqueda de octógonos en el uso arquitectónico. Aspecto muy repetido en el arte religioso, en la construcción de los templos, esa característica construcción de planta en forma de cruz, ya sea latina o griega, produce un espacio de encuentro entre la nave principal y la que produce el corte ortogonal[37]. Este espacio suele estar cubierto mediante una cúpula elevada sostenida mediante un cimborrio[38].

Es en esta solución arquitectónica en la que nos vamos a encontrar el uso de la proporción cordobesa. Una parte importante de los cimborrios construidos, primero en el románico, después en el gótico, serán de tipo octogonal. Un ejemplo de este tipo de construcción la encontramos en la Colegiata de Sant Pere de Ponts, en Lérida[39]. Edificio de influencia lombarda y cuyo cimborrio octogonal es especialmente llamativo por la altura que alcanza sobre el resto del edificio. Otro ejemplo lo constituye la Iglesia de San Martín de Tours (Frómista, Palencia) situada en el Camino de Santiago, de estilo románico y en la que destaca ese cimborrio octogonal.

Figura 17. Cimborrio octogonal. Iglesia de San Martín de Tours (Frómista, Palencia). Fuente: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fromista_-_Iglesia_San_Martin_11.jpg>

37. Esta nave que cruza transversalmente a la nave principal recibe en la terminología arquitectónica religiosa el nombre de transepto o de crucero.
38. El cimborrio no es otra cosa que el cuerpo cilíndrico u octogonal que sirve de base a la cúpula. El cimborrio surgió en la arquitectura altomedieval como solución de mejora que permitiría iluminar la zona principal del templo, el lugar donde se desarrollan la parte fundamental de las celebraciones litúrgicas.
39. Las primeras referencias de este templo lo sitúan ya en el 1024. Lamentablemente el templo sufrió una gran destrucción durante la primera guerra carlista, en 1839, en la que el cimborrio-campanario de tipo octogonal llegó a desaparecer. En el último cuarto del s. XX fue restaurado integralmente.

Y aproximándonos al gótico aparecen ejemplos como el de la Iglesia de Santa María la Real de Sangüesa, iniciada en el s. XII, pero cuya linterna levantada sobre el transepto se realizaría hacia el s. XIII, en pleno gótico.

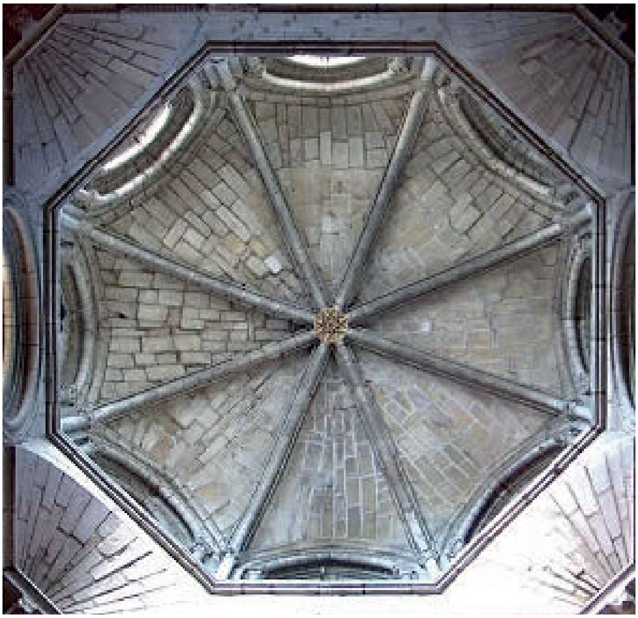


Figura 18. Santa María la Real de Sangüesa.
Fuente: <https://www.culturaydeporte.gob.es/dam/jcr:e2aea1c3-099e-4b66-a1d9-6232baa5671c/Ficha%20santa%20maria%20real.pdf >

En pleno gótico nos encontramos el caso más estudiado de todos[40], el de la Catedral de Burgos. En este edificio nos encontramos con cuatro cúpulas octogonales: el cimborrio, la capilla del Alguacil, la capilla de la Presentación y la vieja Sala Capitular. De las cuatro han sido minuciosamente estudiadas, por un lado, la del cimborrio [Antonia Redondo, Encarnación Reyes[41] & Dirk Huylebrouck, 2011]. En ese análisis queda demostrado que tanto la roseta como las figuras geométricas que figuran en su interior, los octógonos inscritos, o las figuras ornamentales responden a la proporción cordobesa [2011,198-201].

40. Entre los diferentes trabajos publicados acerca de la presencia de la proporción cordobesa en la Catedral de Burgos destacan: [D. Huylebrouck *et al.*, 2011] y [T. Gil-López, 2012].
41. Las dos investigadoras mencionadas son las que más y mejores trabajos han publicado acerca de la proporción cordobesa.

Figura 19. Plano de la Catedral de Burgos. El Cimborrio corresponde al nº 15
y la capilla de la Presentación al nº 8.
Fuente: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Burgos_Catedral_Planta.png >

Por otro lado, el análisis de Gil-López [2012] se centra en la capilla de la Presentación. En este caso nos advierte que ha utilizado un programa de computación, el *Photomodeler*, ante la imposibilidad de acceder a realizar mediciones con otros medios. Esto implicó utilizar métodos fotogramétricos realizando varias tomas con cámara de alta resolución digital y el uso de lente calibrada. La proyección del dibujo del octógono de esta capilla permitió obtener los triángulos cordobeses utilizados para la construcción de la cúpula. Como dice Gil-López,

> The layout of the analysed vault was obtained from a Cordovan triangle, whose shortest side is the side of the octagon, together with other similar, whose sides are multiple of the Cordovan number c. The superposition of these triangles determines not only the position of the keystones but also the geometry of their ribbing and even the layout of the curved ribs formed by two arcs of circumference [Gil López, 2012, 188].

El triángulo cordobés es la figura que permite explicar toda la geometría del rosetón de la capilla de la Presentación.

3. Conclusiones

Al comienzo mencionamos que una investigación que pretendía demostrar que el canon de belleza aceptado desde el mundo griego, y al que Euclides dedica un número importante de proposiciones a la media y extrema razón, terminó encontrando un canon relacionado con una proporción que hasta ese momento había pasado desapercibida. Rafael de la Hoz sería su descubridor y Córdoba la ciudad en la que apareció, de ahí su nombre: Proporción Cordobesa.

Esta no aparece en los *Elementos* de Euclides, ni ha tenido un Pacioli o un Le Corbusier que la encumbren a la divinidad. Sin embargo, la proporción cordobesa va haciéndose un hueco en los diferentes estudios sobre proporciones geométricas y construcciones, aunque dicho hueco es sólo incipiente.

La transversalidad del problema puede suponer tanto un desafío como un incentivo. Es un desafío para los historiadores de la ciencia como para los arquitectos, porque en ambos casos su interés es marginal. Pero esta debilidad puede convertirse también en su fortaleza. Queda mucho trabajo por hacer en el análisis arquitectónico de las proporciones, sólo la Catedral de Burgos proporciona dos cimborrios octogonales más, amén de infinidad de construcciones tanto románicas como góticas donde esta figura geométrica está presente.

El canon de la razón áurea ha eclipsado la búsqueda de otras proporciones. Cuando en el s. XIX, Zeising primero, y Fechner después, reforzaron la idea con sus investigaciones de una proporción que era superior y más deseable que cualquier otra, pero sus estudios no determinaron nunca que fuera la única, sino la mayoritaria. Sería esa visión "romántica" la que se encargaría de plantearla como la única y más deseable. La casualidad llevó a querer confirmar estos planteamientos y que la ciudad de Córdoba, tan ligada a los *Elementos* de Euclides, echara por tierra dicha hipótesis. Rafael de la Hoz demostró una notable perseverancia al investigar el origen del singular canon de belleza cordobés, lo cual le condujo al descubrimiento de una nueva proporción. Su incansable búsqueda ha abierto completamente el campo de investigación para determinar dónde se encuentra presente dicha proporción.

Agradecimientos

A Luis Español González por su valiosa ayuda y colaboración en la resolución de los problemas geométricos presentes en el texto. También expreso mi gratitud hacia los revisores por sus acertadas correcciones, cuya contribución ha sido fundamental para lograr una mejora significativa en el contenido.

Bibliografía

Alexander-Skipnes, I. (2017) *Visual Culture and Mathematics in the Early Modern Perio*d, Taylor & Francis.

Andrea Cook, Th. (1914) *The Curves of Life*. Courier Dover Publications.

Barney, R. (2010) "Notes on Plato on the *Kalon* and the Good". *Classical Philology*, 105(4), 363-377.

BONELL, Carmen (2000) *La divina proporción. Las formas geométricas*. Barcelona, Ediciones UPC.

CIOCCI, Argante (1917) *Luca Pacioli. La Vida y las Obras*. Traducción de Esteban Hernández-Esteve. Biblioteca del Centro Studi "Mario Pancrazi". University Book.

CHAPARRO, Laura (2018) *Le Corbusier, arquitectura geométrica a la medida humana*. En línea: <https://www.bbvaopenmind.com/ciencia/grandes-personajes/le-corbusier-arquitectura-geometrica-a-la-medida-humana/ > (Consulta: 06/06/2023).

DE BRAVO DELORME, C. (2018) "Difíciles son las cosas bellas. Una interpretación del diálogo *Hipias Mayor*", *VERITAS*, nº 40 (agosto 2018), 9-33.

DE LA HOZ ARDERIUS, Rafael (1973) *La proporción cordobesa. Conferencia relativa a la investigación de las constantes arquitectónicas locales, correspondiente a la primera ponencia de la quinta Asamblea de instituciones de cultura de las diputaciones provinciales*. Diputación Provincial de Córdoba.

DE LA HOZ ARDERIUS, Rafael (1995) *La proporción cordobesa*. En: FUENTE MARTOS, M & RODRÍGUEZ, M.T. (eds.), *VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales": cultura y matemáticas*. Córdoba, 7 al 10 de septiembre de 1995. Universidad de Córdoba, Servicio de Publicaciones. <https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/Nautilus-JS/referencias/VIIJAEMproporcioncordobesa.pdf > [Consulta: 06/06/2023].

DOCZI, György (1994) *The power of limits. Proportional Harmonies in Nature, Art and Architecture*. Boston and London: Shambhala.

DOVAL, G. (2011) *Casualidades, Coincidencias y Serendipias de la historia*. Madrid, Nowtilus.

EUCLIDES, *Elementos*, (1991, libros I-IV); (1994, libros V-IX); (1996, libros X-XIII). Trad. y notas Mª Luisa Puertas Castaños, Introducción de Luis Vega. Madrid, BCG. Edición de Ratdolt (Venezia, 1482), < https://dl.wdl.org/18198/service/18198.pdf > [Consulta: 06/06/2023].

EXTREMIANA ALDANA, J. Ignacio; HERNÁNDEZ PARICIO, L. Javier & RIVAS RODRÍGUEZ, M. Teresa (2005) "La divina razón de la belleza". *SIGMA.* R*evista de matemáticas. Matematika aldizkaria,* nº 27, noviembre 2005, 145-178.

FECHNER, G. Th. (1876) *Vorschule der Aesthetik*, Leipzig, Druck und Verlag von Breitkopf & Härtel.

FEDERICO, Carlos Vicente; DÍAZ, Néstor Alberto & MERCADER, María Arias (2017) *Enseñar geometría en contextos de diseño: la proporción cordobesa*. Universidad Nacional de la Plata. <http://www.exactas.unlp.edu.ar/uploads/docs/jeanscen_federico.pdf> [Consulta: 06/06/2023].

FUSTER RUIZ, R. & AGUADÉ TORRELL, J. (s/f) El *Hombre de Vitruvio de Leonardo da Vinci*: un trazado basado en las proporciones del folio. <https://www.academia.edu/23188429/El_Hombre_de_Vitruvio_de_Leonardo_da_Vinci_un_trazado_basado_en_las_proporciones_del_folio > [Consulta: 06/06/2023].

GARCÍA CRUZ, J. A. (2001) *Las matemáticas en Luca Pacioli*. Las Palmas de Gran Canaria. Seminario Orotava de Historia de la Ciencia, año X.

GARRIDO ALARCÓN, Edmundo (2011) "La ciudad anatómica de Francesco di Giorgio Martini: un proyecto frustrado del humanismo del Quattrocento". Ángulo Recto. Revista de estudios sobre la ciudad como espacio plural, vol. 3, nº 2, 293-305. <file:///C:/Users/Usuario/Downloads/Dialnet-LaCiudadAnatomicaDeFrancescoDiGiorgioMartini-3797550.pdf > [Consulta: 06/06/2023].

GIL LOPEZ, Tomás (2012) "The vault of the Chapel of the Presentation in Burgos Cathedral: Divine Canon? No, Cordovan Proportion", *Nexus Network Journal, Architecture & Mathematics* 14, (1), 177-189.

GUTIÉRREZ, S. (2009) "Luca Pacioli y la Divina Proporción". *Suma*, junio, 107-112.

HORACIO (2007) *Odas, Canto secular, Épodos*. Introducción general, traducción y notas de José Luis Moralejo. Madrid, B.C.G.

HUNTLEY, Ernest (1970) *The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty*. New York, Dover Publications, Inc.

Huylebrouck, Dirk; Redondo Buitrago, Antonia & Reyes Iglesias, Encarnación (2011) "Octogonal geometry of the Cimborio in Burgos Cathedral". *Nexus Network Journal*, 13 (2011) 195-2003. <DOI: 10.1007/s00004-011-0057-5>

Jacquier, Y. (2017) *Geometry with the eyes*. Praha, Ed. Yvo Jacquier.

Jámblico (2003) *Vida pitagórica. Protréptico*. Introd., trad. y notas de Miguel Periago. Madrid: B.C.G.

Kant, E. (2006) *Crítica de la facultad de juzgar*. Trad. de P. Oyarzún. Caracas: Monte Ávila Editores.

Kosman, A. (2010) "Beauty and the Good: Situating the *Kalon*". *Classical Philology*, 105(4), 341-357.

Le Corbusier (1953) *El Modulor*. Trad. de Rosario Vera. Buenos Aires, Poseidón.

Markowsky, George (1992) "Misconceptions about the Golden Ratio". *The College Mathematics Journal*, Vol. 23, Nº. 1 (Jan., 1992), 2-19. <http://www.jstor.org/stable/2686193> [Consulta: 06/06/2023].

Martín, C.; de Mora Charles, M. S. & Peñalba, M. (2008) "Los tres problemas clásicos de la antigüedad. La cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo". En: Velamazán, M. A.; Vea, F.; Cobos, J. & Martín, C. (eds.), *La Historia de la Ciencia y de la Técnica: Un arma cargada de Futuro*, Cádiz, Diputación Provincial de Cádiz. <DOI: 10.13140/2.1.1108.8964>

Martini, Giorgio (1480) *Trattato di architettura civile e militare*. Torino.

Montebelli, V. (2015) "Luca Pacioli and perspective (part I)". *Lett Mat Int* **3**, 135–141. < https://doi.org/10.1007/s40329-015-0090-4 > [Consulta: 06/06/2023].

Ohm, M. (1835) *Die Reine Elementar Matematik*, Jonas Verlags-Buchhandlung Berlin. <https://books.google.de/books?id=KS3yAAAAMAAJ&hl=de&pg=PR3#v=onepage&q&f=false> [Consulta: 06/06/2023].

Pacioli, L. (1494) *Summa de arithmetica geometría proportioni et proportionita.* Venetiis. < https://www.cervantesvirtual.com/obra/summa-de-arithmetica-geometria-proportioni-et-proportionalita-1048443/> [Consulta: 06/06/2023].

Pacioli, L. (1509) *Divina proportione*. Venetiis. <https://archive.org/details/divinaproportion00paci/mode/2up> [Consulta: 06/06/2023].
La Divina Proporción. Traducción: Ricardo Resta. Ilustraciones: Luca Pacioli, Leonardo da Vinci. Editor digital: Titivillus.

Passoja, Dann (2017) *The Awakening of the Metallic Mean*. <DOI:10.13140/RG.2.2.17020.23687>

Platón (1981) *Diálogos I. Apología, Critón, Eutifrón, Ion, Lisis, Cármides, Hipias Menor, Hipias Mayor, Laques, Protágoras*. Introd. de Emilio Lledó. Trad. y notas de J. Calonge, E. Lledó y C. García. Madrid: B.C.G.

Platón (1992) *Diálogos, VI. Filebo, Timeo, Critias*. Trad., introd. y notas por M.ª Ángeles Durán y Francisco Lisi. Madrid: B.C.G.

Redondo Buitrago, Antonia & Iglesias, Encarnación. (2023) *La Geometría de los Polígonos Cordobeses*. <https://www.researchgate.net/publication/242539017_La_Geometria_de_los_Poligonos_Cordobeses > [Consulta: 06/06/2023].

— (2008a) "The Cordovan Proportion: Geometry, Art and Paper folding". *Hyperseeing* May-June (2008) 107-114. <http://www.isama.org/hyperseeing/08/08-c.pdf.> [Consulta: 06/06/2023].

— (2008b) "The Geometry of the Cordovan Polygons". *Visual Mathematics* 10, 4. <http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/redondo2009/cordovan.pdf.> [Consulta: 06/06/2023].

— (2009) "Cordovan Geometrical Patterns and Designs". *Journal of ISIS-Symmetry: Art and Science* 1, 4: 68-71.

Roberts, R. M. (1992) *Serendipia*. Madrid: Alianza.

Samaranch Kirner, F. (1995) "Protágoras y el enunciado del hombre medida". *Endoxa: Series Filosóficas*, nº 5, 1995, UNED, Madrid, 145-169.

Soler, J. (2012) *Geometría Sagrada*. Disponible en: <https://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/acerca-de > [Consulta: 06/06/2023].

Spinadel, Vera W. de (2003) "La familia de los números metálicos", *Cuadernos del CIMBAGE.* Nº 6, 17-44.

Spinadel, Vera W. de (2013) "Sistemas de proporciones utilizados en diseño arquitectónico", Área, agenda de reflexión en arquitectura, diseño y urbanismo, nº 19 (octubre), 73-81.

Tomasini, M. C. (2007) "El fundamento matemático de la escala musical y sus raíces pitagóricas", *Revista Ciencia y Tecnología*.

Vasari, G. (1568) *Le vite de' più eccellenti pittori, scultori e architettori*, parte seconda. I Giunti, Firenze. Eng. trans. *The Lives of the Artists*. Julia Conaway Bondanella dnd Peter Bondanella, trans. Oxford University Press, Oxford (1991).

Vega, L. (1991) *Introducción general* a Euclides, *Elementos*, Madrid, B.C.G.

Vernet, J. (1999) *Lo que Europa debe al Islam de España*, Barcelona, El Acantilado.

Vitruvio (1995) *Los diez libros de Arquitectura de Vitruvio*. Trad. de J.L. Oliver Domingo. Madrid, Alianza Ed.

Zeising, Adolf (1854) *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers*, R. Weigel, Leipzig. <https://archive.org/details/neuelehrevondenp00zeis > [Consulta: 06/06/2023].

Zeising, Adolf (1855) *Aesthetische Forschungen* . Francfort del Main. Meidinger. Frankfurt am Main Universitätsbibliothek Johann Christian Senckenberg 2018.

Zeising, Adolf (1859) *Die Metamorphosen in den Verhältnissen der Menschlichen Gestalt von der Geburt bis zur vollendung des Längenwachsthums.* Breslau, Weber.

Zlobec, Borut Jurcic & Rubiano O., Gustavo N. (2016) "Dimensiones de las pirámides egipcias". *Boletín de Matemáticas* 23 (1) 7–19. <https://revistas.unal.edu.co/index.php/bolma/article/view/57251/57279> [Consulta: 06/06/2023].