Economía Agraria y Recursos Naturales, ISSN: 1578-0732, Vol. 2, 2 (2002), pp. 3-26

EXTENSIÓN MULTI-ÍNDICE DEL MÉTODO BETA EN VALORACIÓN AGRARIA[1]

José García Pérez
Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Almería
Salvador Cruz Rambaud[2], Yolanda Rosado López
Departamento de Dirección y Gestión de Empresas
Universidad de Almería

Resumen: El objetivo de este artículo es el estudio y generalización del método de las dos funciones de distribución, utilizado en la teoría de valoración y, más concretamente, en las valoraciones agrarias. El fundamento básico de este método, propuesto por Ballestero (1973), está en la utilización de un índice representativo del activo que pretendemos valorar y en la aceptación de una serie de hipótesis sobre la distribución de la variable índice y de la variable valor del activo.
Hasta este momento y en todos los trabajos publicados sobre este método, se ha mantenido la limitación de utilizar un solo índice (aunque éste sea una síntesis de varios a los que pretende representar). En este trabajo se presenta un método que generaliza el anterior y que permite trabajar con más de un índice, de modo que sea posible determinar el valor de un activo con referencia no sólo a un índice sino a varios. El método permite trabajar con diferentes funciones de distribución de las utilizadas para tratar el riesgo y presenta un test de aceptación de las funciones utilizadas para modelar los índices. Finalmente, se desarrolla un caso práctico.

Palabras Clave: Valoración, multi-índice, ponderación, beta.
Códigos JEL: Q10

A MULTI-INDEX EXTENSION OF THE BETA AGRICULTURAL EVALUATION METHOD.

Summary: The aim of this paper is the study and generalization of the method of the two distribution functions, used in the theory of valuation and, more concretely, in the agrarian valuations. The basic foundation of this method, proposed by Ballestero (1973), is the use of a representative index of the asset that we try to value and in the acceptance of a series of hypotheses on the distribution of the variable index and of the variable value of the asset.
Until this moment and in all the works published on this method, the limitation of using a single index (although this is a synthesis of several to which it tries to represent) has remained. In this work it is presented a method that generalizes the previous one and that allows us to work with more than an index, so that it is possible not only to determine the value of an asset with reference to an index but to several ones. The method allows to work with different distribution functions of those used to treat the

[1] Los autores agradecen las sugerencias de tres evaluadores anónimos que han permitido mejorar la calidad del texto
[2] Salvador Cruz Rambaud. Dept. Dirección y Gestión de Empresas. Universidad de Almería. La Cañada de San Urbano, s/n. 04120-Almería
Tel.: 950.01.51.84 Fax: 950.01.51.78 scruz@ual.es
Recibido en noviembre de 2000. Aceptado en febrero de 2002

risk and it presents a test of acceptance of the functions used to model the indexes. Finally, a practical case is developed.

Key-words: Valuation, multi-index, weighting, beta.

1. Introducción

En la teoría de valoración y, más concretamente, en las valoraciones agrarias, es conocido el método de las dos funciones de distribución. El fundamento básico de este método, propuesto a nivel teórico por Ballestero (1971, 1973, 1991a y 1991b), Ballestero y Caballer (1982), Caballer (1975 y 1994), Romero (1977, 1989 y 1991), García, Cruz y Andújar (1999) y García, Trinidad y Gómez (1999) y, a nivel de aplicaciones prácticas, por Alonso y Lozano (1985), Cañas, Domingo y Martínez (1994), Díaz, Sumpsi, Urbiola y Varela (1983), Guadalajara (1996) y García, Cruz y Rosado (2000), está en la utilización de un índice representativo del activo que pretendemos valorar y en la aceptación de la siguiente hipótesis de trabajo: Si el índice L_i de un activo F_i es mayor que el L_j de otro activo F_j, el valor de mercado V_i correspondiente al primer activo será también mayor que el valor de mercado V_j correspondiente al segundo.

A partir de esta hipótesis, se supone una función de distribución para el valor de mercado, *G*, y una función de distribución, *F*, para el valor del índice; de este modo, se puede establecer que, para un determinado valor del índice, L_k, el valor de mercado correspondiente se obtendrá mediante la transformación :

$$V_k = \Phi(L_k) \Leftrightarrow G(V_k) = F(L_k). \tag{1}$$

Generalmente, el desarrollo de este método exige que las funciones de densidad a utilizar para modelar el índice y el activo sean funciones campaniformes, de modo que puedan ser estimadas a partir de valores característicos de la distribución como el recorrido y la moda; no obstante, también sería posible utilizar otro tipo de funciones si dispusiésemos de información suficiente. Para ello, hemos de señalar que este método está especialmente indicado para el caso de que tengamos poca información sobre las variables a modelar; podemos decir que incluso se puede utilizar cuando no tenemos más información que la referente a los valores máximos, mínimos y más probables de las variables o bien de otras consultas que pudiesen formularse al experto.

En este trabajo, pretendemos presentar las siguientes contribuciones en el ámbito de la teoría general de valoración:

1. Estudiar la posibilidad de trabajar con más de un índice, de manera que sea posible determinar el valor de un activo con referencia no a un solo índice, sino a varios.

2. Pasar de un ambiente de incertidumbre a un ambiente de riesgo, obteniendo una regresión en función de los valores obtenidos para los diferentes campos de variación tanto de los índices como del valor del activo. En este sentido, “utilizando una terminología bastante usual, se puede hablar de inversiones con riesgo cuando se conocen las probabilidades de los posibles estados de sus magnitudes, y de inversiones con incertidumbre cuando no se conocen tales

probabilidades” (Suárez Suárez, 1991). Modernamente, se habla del caso aleatorio o de incertidumbre medida y del caso de total incertidumbre.

3. Comparar estos resultados con los obtenidos mediante modelos hedónicos que utilizan asimismo diferentes índices para determinar el precio o valor de un bien.

2. Planteamiento del problema

Supongamos que la función de distribución $G(v)$ modela el comportamiento de la variable “valor del activo”, V, que va a ser la variable endógena o explicada y que pretendemos obtener el valor de esta variable, denominada en lo sucesivo valor de mercado, en función de dos índices I_1 e I_2 , cuyas funciones de distribución vienen dadas, respectivamente, por $F_1(x_1)$ y $F_2(x_2)$. Para ello, será necesario tener en cuenta las siguientes hipótesis de trabajo:

Hipótesis 1: Si el índice I_{1i} de un activo F_1 es mayor que el I_{2i} de otro activo F_2, el valor de mercado V_1 correspondiente al primer activo será también mayor que el valor de mercado V_2 correspondiente al segundo.

Hipótesis 2: Para cada uno de los índices, deberá satisfacerse la hipótesis 1.

Hipótesis 3: Los índices son independientes, es decir, las variables aleatorias que representan a los índices son independientes.

Esta hipótesis es absolutamente lógica, ya que, de existir dependencia entre los índices, estaríamos utilizando información redundante y seria mejor refundirlos en uno sólo.

Con las hipótesis anteriores, es posible, en primer lugar, obtener la función de distribución conjunta de la variable aleatoria bivariante $F(x_1,x_2) = F_1(x_1)\cdot F_2(x_2)$ y, a partir de ella, obtener una regla para determinar el valor V_k de un activo, conocidos los valores I_{1k} e I_{2k} de los índices, a saber:

$$V_k = \Phi(I_{1k}, I_{2k}) \Leftrightarrow G(V_k) = F_1(I_{1k})\cdot F_2(I_{2k})\,. \qquad (2)$$

3. Distintas alternativas de ponderación

Obtener la forma de la función Φ dependerá de la forma de las funciones G, F_1 y F_2; no obstante, como veremos más adelante, siempre será posible obtener valores de V_i, I_{1i} e I_{2i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, en el rango de variación de las distintas variables, mediante un proceso de estandarización. Estos valores obtenidos nos permitirán, en su caso, realizar un ajuste de regresión lineal múltiple que, en cierto modo, aproxima a la función Φ.

Si pretendemos obtener la función de distribución conjunta de los índices, podremos construirla como función multiplicativa de las funciones de distribución $F_1(x_1)$ y $F_2(x_2)$, pero teniendo en cuenta que los valores de dichas expresiones oscilan entre 0 y 1 y el resultado no se encontraría entre las dos funciones de distribución sino que estaría por debajo de ambas, minusvalorando el resultado de la valoración en cualquier caso. Será, por tanto, necesario ponderar las funciones de distribución; veámoslo matemáticamente. En el caso multiplicativo ocurre lo siguiente:

$$F(x_1,x_2)=F_1(x_1)\cdot F_2(x_2)<F_1(x_1)$$
$$F(x_1,x_2)=F_1(x_1)\cdot F_2(x_2)<F_2(x_2).$$

Vemos que, si no ponderamos, siempre estaríamos minusvalorando el activo cuya función de distribución es $G(v)$. En efecto, si $G(v)=F_1(x_1)>F(x_1,x_2)$, obtendremos un valor de v mayor que si $G(v)=F(x_1,x_2)$; para corregir este efecto reductor es para lo que necesitamos introducir las funciones ponderadas.

Por otra parte, podemos plantearnos la siguiente cuestión: ¿Es posible, en el contexto de las hipótesis anteriores conseguir que uno de los índices tenga mayor importancia que el otro?. Para ello, supongamos que sabemos a priori que el índice 1 (I_1) tiene mayor importancia que el índice 2 (I_2); esto puede deberse bien a información intrínseca del problema (que ha podido ser aportada por expertos) o bien a que haya sido posible realizar un análisis de componentes principales[3]. Por tanto, aunque existen infinitas formas, en este trabajo se presentan sólo dos esquemas para ponderar las funciones de distribución: aditivo (ponderación de la función de distribución) y exponencial (tasa de crecimiento y tasa de fallo). Se podría contemplar cualquier otra, con la condición de que la función ponderada fuera una función de distribución y sus valores se encontraran comprendidos entre los de las funciones de distribución unidimensionales.

- ***Ponderación de la función de distribución***

$$I(x_1,x_2)=pF_1(x_1)+qF_2(x_2).$$

- ***Ponderación de la tasa de crecimiento*:**

Dadas las variables aleatorias X_1 y X_2, definidas sobre el mismo conjunto X, la tasa de crecimiento de cada una de ellas vendrá dada por $\frac{f_1}{F_1}$ y $\frac{f_2}{F_2}$, respectivamente, con lo cual la ponderación obedecería a la siguiente expresión:

$$\frac{f}{F}=\alpha\frac{f_1}{F_1}+(1-\alpha)\frac{f_2}{F_2},$$

siendo f y F las funciones de densidad y de distribución, respectivamente, de la variable aleatoria a determinar, definida también sobre X.

Si integramos entre 0 (mínimo valor de un bien) y x, el resultado sería:

$$\ln F=\alpha\ln F_1+(1-\alpha)\ln F_2.$$

La ponderación de la tasa de crecimiento se llevaría a cabo sobre la bisectriz del plano X_1X_2, de manera que las variables aleatorias X_1, X_2 y (X_1,X_2) tomarían siempre los valores x, x y (x,x), respectivamente, con lo que la integral se haría sobre la misma

[3] Si dispusiésemos de los datos necesarios sería posible, mediante un análisis de la varianza, obtener las componentes principales y ver el nivel de explicación que aporta cada una de ellas.

variable. Este resultado justificaría la siguiente generalización del proceso para funciones de distribución bivariantes. En efecto, tomando logaritmos neperianos en la siguiente expresión:

$$F(x_1, x_2) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2), \tag{3}$$

obtenemos:

$$\ln F(x_1, x_2) = \ln F_1(x_1) + \ln F_2(x_2). \tag{4}$$

En esta expresión, que está en forma de suma, podremos ponderar de forma directa o inversa, obteniendo:

a) *Ponderación directa*:

$$\ln F^d_{(p_1, p_2)}(x_1, x_2) = \frac{p_1 \ln F_1(x_1) + p_2 \ln F_2(x_2)}{p_1 + p_2}. \tag{5}$$

b) *Ponderación inversa*:

$$\ln F^i_{(p_1, p_2)}(x_1, x_2) = \frac{\frac{1}{p_1} \ln F_1(x_1) + \frac{1}{p_2} \ln F_2(x_2)}{\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}}, \tag{6}$$

siendo p_1 y p_2 las ponderaciones que el experto conceden a F_1 y a F_2, respectivamente.

Si ahora elevamos a e ambos miembros de las ecuaciones (5) y (6), obtendremos las funciones de distribución ponderadas:

a) *Directa*:

$$F^d_{(p_1, p_2)}(x_1, x_2) = F_1(x_1)^{\frac{p_1}{p_1 + p_2}} \cdot F_2(x_2)^{\frac{p_2}{p_1 + p_2}}. \tag{7}$$

b) *Inversa*:

$$F^i_{(p_1, p_2)}(x_1, x_2) = F_1(x_1)^{\frac{p_2}{p_1 + p_2}} \cdot F_2(x_2)^{\frac{p_1}{p_1 + p_2}}. \tag{8}$$

Aunque las ponderaciones directa e inversa son formalmente equivalentes, representan dos alternativas de elección por parte del experto. En general, si expresamos la ponderación en tanto por uno, haciendo $p_1 + p_2 = 1$, podremos poner $p_1 = p$ y $p_2 = 1 - p$, con lo que las fórmulas (7) y (8) quedarán:

a) *Directa*:

$$F^d_p(x_1, x_2) = F_1(x_1)^p \cdot F_2(x_2)^{1-p}. \tag{9}$$

b) *Inversa*:

$$F^i_p(x_1, x_2) = F_1(x_1)^{1-p} \cdot F_2(x_2)^p. \tag{10}$$

- ***Ponderando la tasa de fallo*:**

Podemos llevar a cabo la ponderación en función de la tasa de fallo; ésta respondería a la expresión $\frac{f}{1-F}$. El uso de la tasa de fallo parece mas lógico puesto que nos fijamos en el futuro de las variables aleatorias. Veamos cómo se llevaría a cabo la ponderación matemáticamente; para ello, partimos de las tasas de fallo de dos variables aleatorias X_1 y X_2, definidas sobre el mismo conjunto X que puede ser el intervalo [0,1] si, previamente, hemos estandarizado ambas variables:

$$\frac{f}{1-F} = \alpha \frac{f_1}{1-F_1} + \beta \frac{f_2}{1-F_2}.$$

Si integramos entre 0 y x, llegamos a la siguiente expresión:

$$1-F = (1-F_1)^{\alpha} \cdot (1-F_2)^{\beta}, \text{ siendo } \beta = 1 - \alpha.$$

Por ejemplo, en la valoración de una máquina no nos interesa lo pasado, sino más bien el futuro potencial del activo: el desgaste que se lleva arrastrando del pasado, en realidad, ya no cuenta. Generalizando este proceso para funciones de distribución bivariantes, se obtiene:

$$F(x_1, x_2) = 1-(1-F_1(x_1))^{\alpha} \cdot (1-F_2(x_2))^{\beta}. \tag{11}$$

4. Resultados generales sobre funciones ponderadas

A continuación, vamos a demostrar que, en el caso de funciones de distribución ponderadas, no se produce el sesgo que suponía el uso de una función de distribución multiplicativa. En primer lugar, vamos a demostrar que la función ponderada se encuentra entre F_1 y F_2, tanto para el caso de ponderación directa, como inversa, cuando las variables aleatorias X_1 y X_2 se encuentran definidas sobre el mismo conjunto X.

- ***Función ponderada directa*:**

Si, para un par de valores x_1 y x_2, se verifica que $F_1(x_1) < F_2(x_2)$, entonces:

a) $F_1^p(x_1) \cdot F_2^{1-p}(x_2) > F_1(x_1)$. En efecto,

$$F_1(x_1) = F_1^p(x_1) \cdot F_1^{1-p}(x_1) < F_1^p(x_1) \cdot F_2^{1-p}(x_2).$$

b) $F_1^p(x_1) \cdot F_2^{1-p}(x_2) < F_2(x_2)$. En efecto,

$$F_2(x_2) = F_2^p(x_2) \cdot F_2^{1-p}(x_2) > F_1^p(x_1) \cdot F_2^{1-p}(x_2).$$

Por tanto, hemos demostrado que si $F_1(x_1) < F_2(x_2)$, entonces:

$$F_1(x_1) < F_p^d(x_1, x_2) < F_2(x_2).$$

Lógicamente:

$$p \to 1 \Rightarrow F_p^d \to F_1$$
$$p \to 0 \Rightarrow F_p^d \to F_2$$

Luego p nos va a dar una idea de la importancia que tiene cada uno de los índices para valorar el activo. En particular, si obligamos a la variable aleatoria (X_1,X_2) a que se mueva en la bisectriz del plano X_1X_2, entonces, para un determinado valor de x, se podrían obtener $F_1(x)$, $F_2(x)$ y $F_p{}^d(x,x)$, que, representados gráficamente, probarían que la función de distribución ponderada se encuentra entre las otras dos.

- ***Función ponderada inversa*:**

Si, para un par de valores x_1 y x_2, se verifica que $F_1(x_1) < F_2(x_2)$, entonces:

a) $F_1^{1-p}(x_1)F_2^p(x_2) > F_1(x_1)$. En efecto,

$$F_1(x_1) = F_1^{1-p}(x_1)\cdot F_1^p(x_1) < F_1^{1-p}(x_1)\cdot F_2^p(x_2).$$

b) $F_1^{1-p}(x_1)F_2^p(x_2) < F_2(x_2)$. En efecto,

$$F_2(x_2) = F_2{}^{1-p}(x_2)\cdot F_2{}^p(x_2) > F_1{}^{1-p}(x_1)\cdot F_2{}^p(x_2).$$

Por tanto, hemos demostrado que si $F_1(x_1) < F_2(x_2)$, entonces:

$$F_1(x_1) < F_p^i(x_1, x_2) < F_2(x_2).$$

Lógicamente:

$$p \to 1 \Rightarrow F_p^i \to F_1$$
$$p \to 0 \Rightarrow F_p^i \to F_2$$

Si generalizamos las ponderaciones anteriores, obtenemos la distribución:

$$F_p^{\alpha,\beta}(x_1, x_2) = F_1^{\alpha}(x_1)\cdot F_2^{\beta}(x_2), \text{ con } \alpha + \beta = 1.$$

Análogamente, usaremos también la expresión $F_p^{\alpha,\beta} = G(v)$.

Para ver con mayor facilidad que la ponderación nos permite obtener funciones de distribución adecuadas, nos apoyaremos también en ejemplos gráficos que pasamos a ver a continuación.

En la figura 1, el índice 2 es fijo mientras que el índice 1 es variable. A la vista de dicha figura, observamos que la función de distribución multiplicativa (línea amarilla) queda por debajo de las funciones de distribución individuales de cada índice, mientras que serán las funciones de distribución ponderadas las que más se aproximen a $G(z)$.

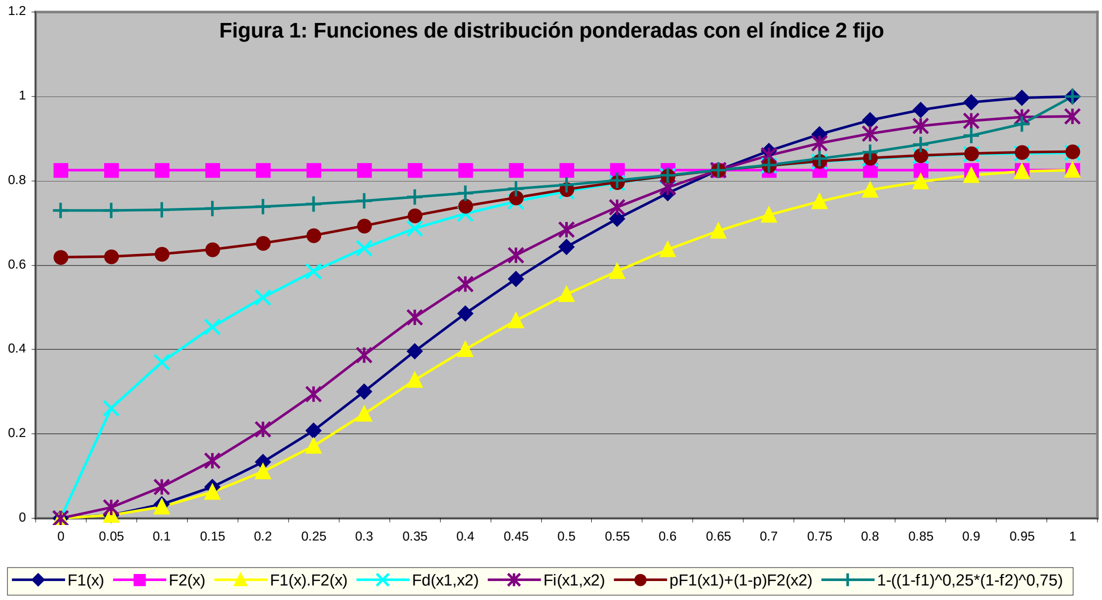


Figura 1: Funciones de distribución ponderadas con el índice 2 fijo

En la figura 2, ambos índices son variables y hemos establecido la ponderación *p* = 0.25. De nuevo, vemos que el caso multiplicativo no responde correctamente a la especificación que nosotros necesitamos aplicar, mientras que las funciones ponderadas se mantienen en el área que se encuentra entre las funciones de distribución individuales de cada índice.

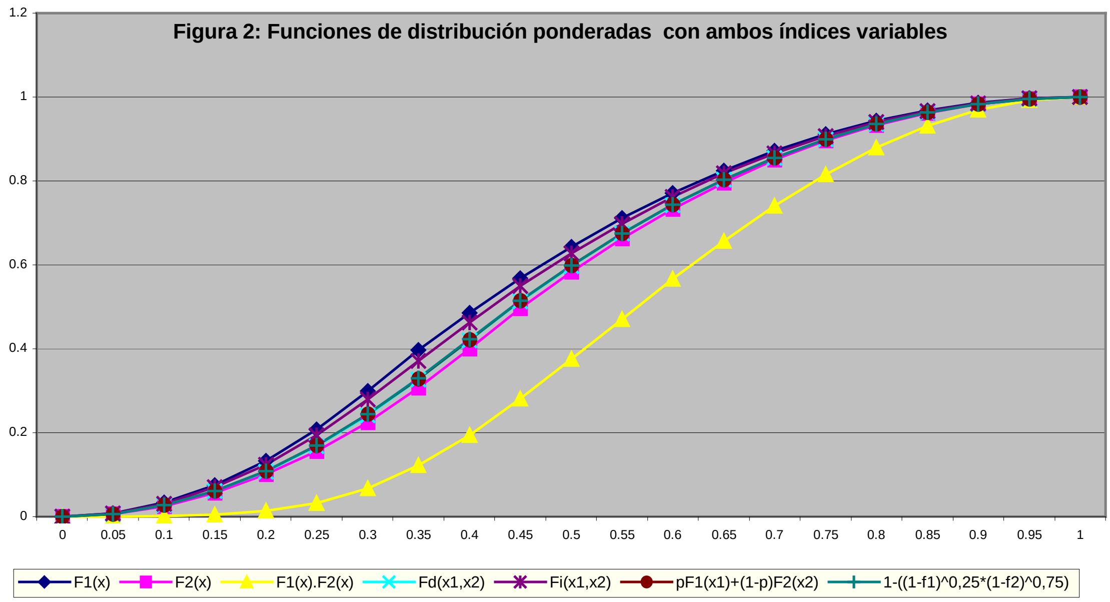


Figura 2: Funciones de distribución ponderadas con ambos índices variables

Veamos, a continuación, algunos resultados de las ponderaciones directa e inversa (véanse las demostraciones en el Anexo I).

Teorema 1. Las funciones de distribución ponderadas, tanto la inversa como la directa, toman siempre valores mayores que la función de distribución compuesta sin ponderar, bajo la hipótesis de independencia de las variables aleatorias unidimensionales.

Es evidente que las funciones de distribución ponderadas, bajo la hipótesis de independencia de las variables aleatorias, tendrán distribuciones marginales crecientes sea cual sea el valor de *p*; nos interesaría conocer cómo se comporta la función de distribución ponderada, directa o inversa, con respecto a *p*. Para ello, vamos a establecer los siguientes resultados:

Teorema 2. La función $F_p^d(x_1, x_2)$ es creciente respecto de *p*, siempre que $F_1(x_1) \geq F_2(x_2)$ y decreciente respecto de *p*, siempre que $F_1(x_1) \leq F_2(x_2)$.

Como es lógico, nos interesará tener una función ponderada que sea siempre creciente con *p*, ya que, si de los dos índices que van a determinar el valor del activo queremos dar mayor importancia a uno de ellos, es razonable esperar que la función de distribución ponderada sea siempre creciente respecto de *p*, ya que, de otro modo, estaríamos consiguiendo el efecto contrario al que esperamos obtener. Por tanto, si queremos obtener una función que sea siempre creciente con *p*, debemos definir la función ponderada del siguiente modo:

$$\begin{aligned} F_p(x_1, x_2) &= F_p^d(x_1, x_2), \text{ si } F_1(x_1) > F_2(x_2) \\ F_p(x_1, x_2) &= F_p^i(x_1, x_2), \text{ si } F_1(x_1) < F_2(x_2) \end{aligned} \qquad (12)$$

5. Funciones ponderadas con distribuciones triangulares subyacentes en ambiente de incertidumbre

Si trabajamos con distribuciones triangulares subyacentes para los índices y para el valor del activo, éstas podrán ser determinadas conociendo el valor máximo, el valor mínimo y la moda. Supongamos que estos valores son los siguientes:

- Valores para el activo: (A^0, M^0, B^0).
- Valores para los índices: (a_1^0, m_1^0, b_1^0) y (a_2^0, m_2^0, b_2^0).

Si estandarizamos los datos para el activo, utilizando la expresión:

$$X = \frac{X^0 - A^0}{B^0 - A^0}$$

y similares para los índices, podremos trabajar con distribuciones triangulares de parámetros $(0,M,1)$, $(0,m_1,1)$ y $(0,m_2,1)$, cuyas funciones de distribución serán:

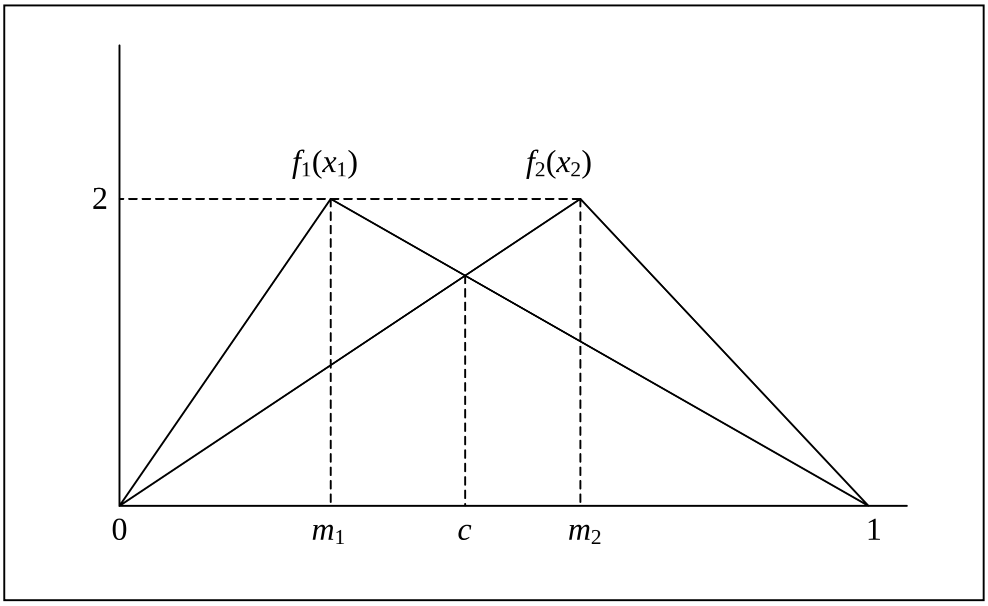
$$F(x_1) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{m_1}, \text{ si } x_1 \leq m_1 \\ 1 - \dfrac{(1-x_1)^2}{1-m_1}, \text{ si } x_1 > m_1 \end{cases} \qquad (13)$$

Para obtener la función de distribución ponderada, es preciso saber cómo se comportan F_1 y F_2 en el intervalo [0,1]. Es fácil demostrar que se cumple la siguiente

Proposición 1. Si $F_1(x_1)$ y $F_2(x_2)$ son dos funciones de distribución triangulares, cuyas modas estandarizadas son, respectivamente, m_1 y m_2, entonces:

$$F_1(x) > F_2(x) \text{ si y sólo si } m_1 < m_2 \text{, para todo } x \in [0,1].$$

Demostración. Como las funciones de densidad son triangulares y sus bases y áreas valen 1, sus alturas deben valer 2:



Para cualquier punto x situado en el intervalo $[0,c]$, la desigualdad es visible y evidente, ya que el área bajo f_1 a la izquierda de x es mayor que la contenida bajo f_2. Si el punto x se encuentra en [c,1], tomaríamos las áreas situadas a la derecha, obteniendo $1 - F_1(x) < 1 - F_2(x)$, de donde se deduce la desigualdad requerida.

6. Aplicación a un caso práctico

Estamos ahora en condiciones de resolver un caso práctico. Para ello, partimos de los datos contenidos en el ejemplo de Alonso y Lozano (1985). La información básica utilizada en este ejemplo es la relativa a las transacciones de fincas agrícolas en las comarcas Tierras de Campos y Centro de la provincia de Valladolid relativa al período 1977-1982. Después de un examen riguroso, se han seleccionado 30 transacciones de las que los datos relativos a su valor de mercado y otras características se consideran fiables.

Los datos de que disponemos para cada una de ellas, después de homogeneizarlos, son: valor de mercado, distancia a Valladolid e ingresos por hectárea (en pesetas constantes). El trabajo desarrollado por los autores toma los ingresos por hectárea como índice para obtener el valor de mercado y no utiliza para nada la distancia a Valladolid; sin embargo, nosotros consideramos que la distancia a Valladolid puede tener importancia a la hora de valorar una finca, y que es razonable pensar que, a medida que aumenta la distancia a Valladolid (sin tener en cuenta otras capitales de provincia), debe disminuir el valor de la finca, manteniéndose constantes los ingresos por hectárea; por esta razón, tomamos como índice la inversa de la distancia al objeto de que se cumplan las hipótesis de la Sección 2.

La selección de los índices es un trabajo de campo que debe fundamentarse teóricamente en cada caso, pero no cabe duda de que, en el caso que nos ocupa, la producción por hectárea y la distancia a Valladolid son dos variables independientes (a priori) y relevantes. Otras variables relevantes podrían ser la accesibilidad a mercados, la distancia a centros de transformación, la disponibilidad de mano de obra en la comarca, la existencia de vías de comunicación, etc.

Según los datos del ejemplo, la distribución de probabilidades de la característica distancia a Valladolid es:

Intervalo (en Km.)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
Frecuencia Absoluta	2	3	5	4	7	6

Según estos valores, si tomamos como segunda característica, para el valor de mercado, la inversa de la distancia multiplicada por cien, los datos originales, para cada uno de los índices, así como para el valor del mercado, serán:

Valor de mercado **:**

Datos originales:

$A^0 = 250.000$

$B^0 = 500.000$

$C^0 = 325.000$

Datos estandarizados:

$M = 3/10$

Función de distribución estandarizada:
$$G(v) = \begin{cases} \dfrac{v^2}{3/10}, \text{si } 0 < v \leq 3/10 \\ 1 - \dfrac{(1-v)^2}{1-3/10}, \text{si } 3/10 < v < 1 \end{cases} \quad (14)$$

***Índice I_1: índice de ingresos por hectárea*:**

Datos originales:

$a_1^0 = 20.000$

$b_1^0 = 50.000$

$m_1^0 = 32.500$

Datos estandarizados:

$m_1 = 5/12$

Función de distribución estandarizada:
$$F_1(x_1) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{5/12}, \text{si } 0 < x_1 \leq 5/12 \\ 1 - \dfrac{(1-x_1)^2}{1-5/12}, \text{si } 5/12 < x_1 < 1 \end{cases} \quad (15)$$

Índice I_2*: *inversa de las distancia a Valladolid ($\times$100):

Datos originales:

$a_2^0 = 1/70$

$b_2^0 = 1/10$

$m_2^0 = 1/50$

Datos estandarizados:

m_2= 1/15

Función de distribución estandarizada: $F_2(x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_2{}^2}{1/15}, \text{si } 0 < x_2 \leq 1/15 \\ 1 - \dfrac{(1-x_2)^2}{1-1/15}, \text{si } 1/15 < x_2 < 1 \end{cases}$

(18)

En estas condiciones podremos construir la función de distribución ponderada para todos los valores del eje (x,x) de valores estandarizados de los índices I_1 e I_2. La llamaremos la *función de ponderación diagonal*.

Teniendo en cuenta la expresión (14) y sabiendo que, al ser $m_2 < m_1$, esto implica que $F_2(x) > F_1(x)$, para todo $x \in$ [0,1], en este caso la función de ponderación será la inversa, es decir:

$$F_p^i(x,x) = (F_1(x))^{1-p} \cdot (F_2(x))^p . \qquad (16)$$

Como es lógico, conociendo las expresiones (16), (17) y (18), asignando un valor a p y, teniendo en cuenta la expresión (14), siempre será posible aplicar la fórmula (2) y, por lo tanto, dados unos valores para los índices I_1 e I_2, se podrá obtener un valor para el valor de mercado del activo correspondiente.

Por tratarse de funciones de dos variables, vamos a obtener las funciones marginales, de modo que, si fijamos la distancia a Valladolid, podamos obtener el valor de las fincas que, estando a esta distancia, tienen distintos rendimientos y, por el contrario, si fijamos un rendimiento, podríamos obtener el valor de esas fincas en función de su distancia a Valladolid.

Veamos como funcionaría el modelo en el siguiente ejemplo: Determinar el valor de mercado para una finca cuyos ingresos por hectárea son 32.330 pesetas, si se encuentra a una distancia de 24 kilómetros de Valladolid, si ponderamos los ingresos en un 75% y el inverso de la distancia en un 25%.

A partir de los valores mayor, menor y más probable dados anteriormente para los índices señalados, estandarizamos los valores aportados:

$$I_1^s = \frac{32330 - 20.000}{50.000 - 20.000} = 0{,}411$$

$$I_2^s = \frac{1/24 - 1/70}{1/10 - 1/70} = 0{,}31944444$$

A continuación, calculamos:

$$F_1(I_1^s) = \frac{0,411^2}{5/12} = 0,4054104$$

$$F_2(I_2^s) = 1 - \frac{(1-0,31666667)^2}{1-1/15} = 0,49970239$$

Como se cumple que $F_2(I_2^s) > F_1(I_1^s)$, debemos utilizar la ponderación inversa y, por lo tanto :

$$F_p^i(I_1^s, I_2^s) = (F_1(I_1^s))^{1-p} \cdot (F_2(I_2^s))^p = 0,4742995\,.$$

Determinado este valor para la función de distribución conjunta de ambos índices o características, debemos compararlo con la función de distribución del valor de mercado (16); como 0,47424995 es mayor que 3/10, debemos despejar en la segunda rama de la función, obteniendo la siguiente ecuación:

$$1 - \frac{(1-x)^2}{1-3/10} = 0,47424995\,,$$

cuya solución nos conduce a un valor estandarizado para el valor de mercado igual a 0,383225412. Si procedemos a obtener el valor original que corresponde a este valor estandarizado, podremos finalmente conseguir el valor de mercado para los índices y la ponderación dada. De modo que el valor será *V* = 250.000+250.000*0,383225412 = 345.806,3529.

Si, en el mismo ejemplo, hubiésemos tomado una distancia de 60 kilómetros. El resultado hubiese sido distinto, pero mas interesante puede resultar a efectos prácticos, calcular que hubiese ocurrido si mantenemos la producción fija y calculamos los valores según la distancia a Valladolid, vamos a obtener esta función de distribución marginal y a representar gráficamente como evolucionan los valores según la distancia, manteniendo constante la producción.

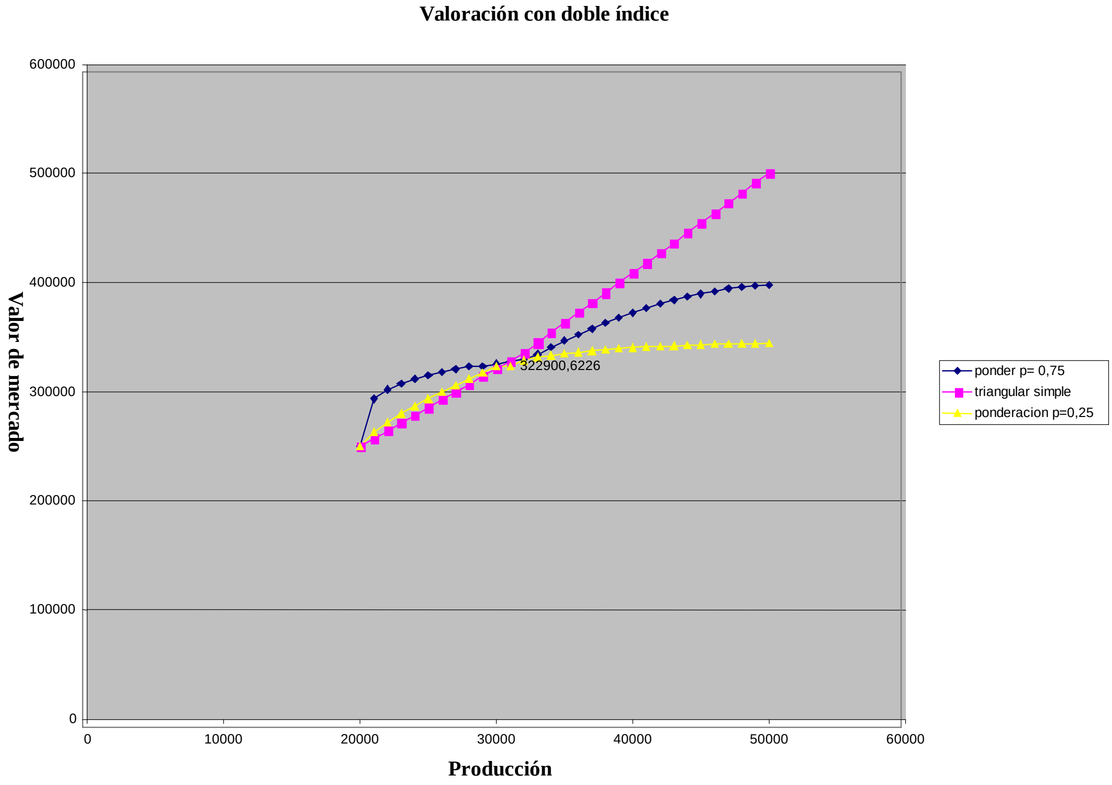


Figura 3

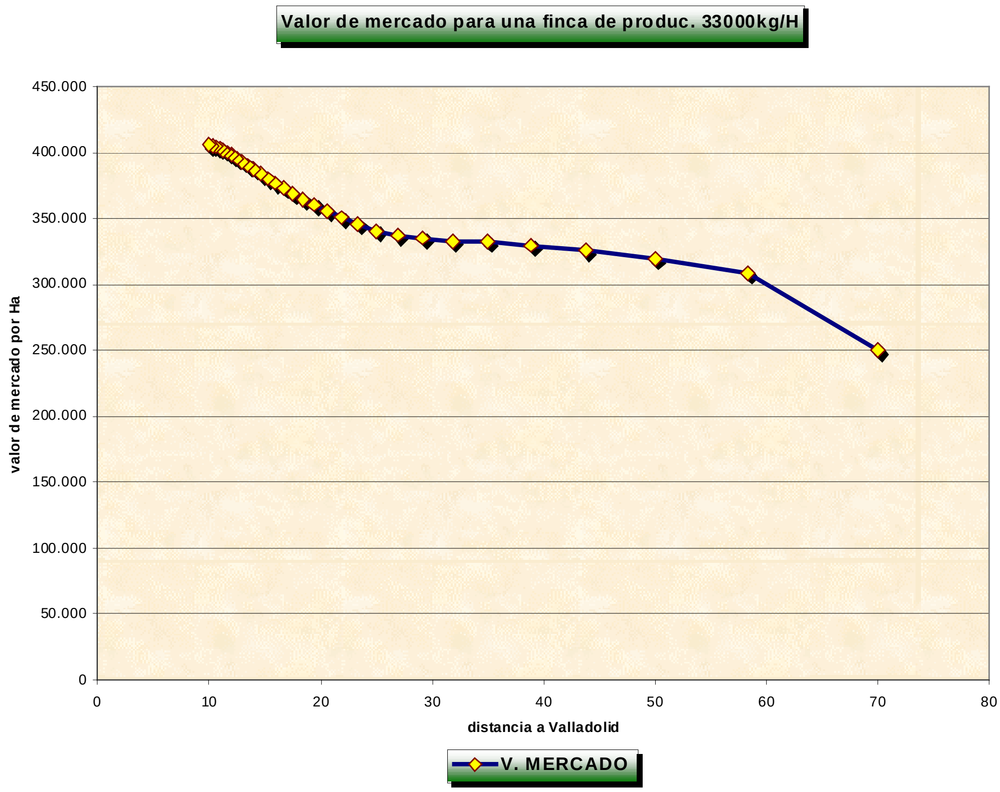


Figura 4

Como hemos visto en estos ejemplos, el modelo presentado exige conocer el valor de la ponderación, pues, hasta el momento, ésta ha sido elegida de un modo arbitrario (aunque sea con la información de un experto). De lo anterior se deduce que es necesario incluir un método para obtener la ponderación; en primer lugar, se podría hacer a partir de las modas:

$$G(v) = F_1^{\,p}(I_1)\cdot F_2^{1-p}(I_2)\,.$$

Es decir, cuando v es la moda del valor del activo e I_1 e I_2 se igualan a la moda de los índices, obtenemos una ecuación que permite despejar p:

$$\frac{y^2}{3/10} = \left(\frac{x_1^2}{5/12}\right)^p \cdot \left(\frac{x_2^2}{1/15}\right)^{1-p}.$$

Ahora bien, si y = 3/10, entonces x_1 = 5/12 y x_2 = 1/15, por lo que nos quedaría la siguiente expresión:

$$\frac{3}{10} = \left(\frac{5}{12}\right)^p \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^{1-p}.$$

De aquí podemos despejar p que es igual a 0,820742451.

Además de la obtención de la ponderación a través del método de la moda, también podemos aplicar modelos econométricos para obtener las ponderaciones, como veremos a continuación.

7. Aplicación econométrica

Mediante el ajuste econométrico, vamos a intentar mostrar cómo es posible encontrar, de forma sencilla, la ponderación de cada uno de los índices, como forma de aproximarnos al valor del activo. Para el desarrollo del problema práctico, hemos utilizado el programa Ewies.

En primer lugar, hemos desarrollado la que, a partir de ahora, será nuestra muestra, dividiendo la función de distribución estandarizada en 30 intervalos y tomando los valores de los extremos de dichos intervalos como observaciones de nuestra muestra.

Los tipos de ponderación que hemos utilizado en la aplicación econométrica son los estudiados a lo largo de todo el trabajo: la ponderación de la función de distribución, la ponderación de la tasa de crecimiento en su vertiente directa y la ponderación de la tasa de fallo. Estos tres casos son los que vemos a continuación.

- ***Función ponderada directa*:**

La función de distribución con la que hemos trabajado, en primer lugar, es una función ponderada de forma directa, que responde a la siguiente expresión:

$$G(v_1) = F_p^d(I_{11}, I_{12}) = F_1(I_{1t})^p \cdot F_2(I_{2t})^{1-p}.$$

Para hacerla operativa, hemos tomado logaritmos, como forma de hacer lineal la ecuación de dependencia de las variables y así obtenemos la siguiente ecuación de comportamiento de dichas variables:

$$\ln G(v_1) = p \ln F_1(I_{1t}) + (1-p) \ln F_2(I_{2t}).$$

Por consiguiente, para realizar el filtrado, podemos probar con todas las funciones propias de la metodología PERT y, de los ajustes realizados, llevaremos a cabo un estudio de idoneidad de los mismos a través de los coeficientes de determinación, tanto el estándar como los ajustados.

Las variables que consideramos para llevar a cabo el caso econométrico son las mismas que utilizamos en el punto anterior: denominaremos ACTIVO al valor de mercado; INDICE1, a los ingresos por hectárea; INDICE2, a la inversa de la distancia a Valladolid. Sin embargo, las variables sobre las que plantearemos la regresión serán las anteriores en logaritmos; por tanto, sus denominaciones irán precedidas por LN.

En la siguiente figura, mostramos las funciones de distribución con las que trabajamos para realizar la regresión. Lo que intentamos establecer es la ponderación que los dos índices con los que trabajamos necesitan tener para ajustarse de forma más certera al valor de mercado del activo.

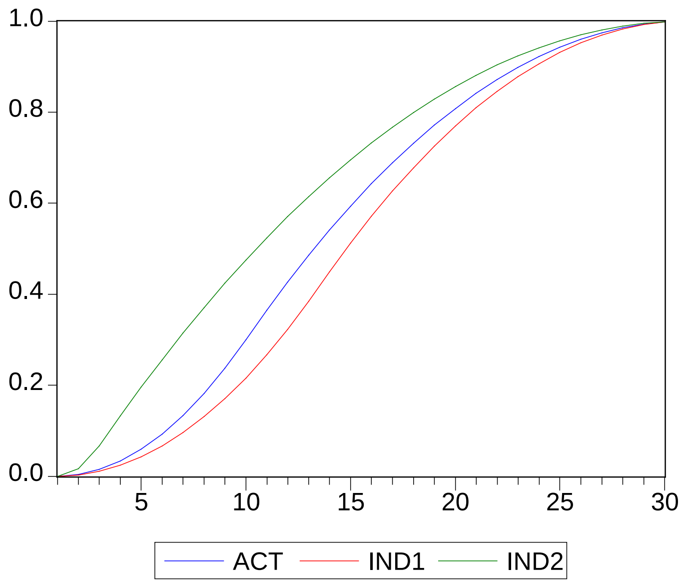


Figura 5

A continuación, realizamos la regresión para obtener las ponderaciones de cada uno de los índices en el valor del activo.

CUADRO 1

Dependent Variable: LNACTIVO
Method: Least Squares

Date: 04/14/00 Time: 11:24				
Sample(adjusted): 2 30				
Included observations: 29 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LNINDICE1	0.615456	0.045935	13.39829	0.0000
LNINDICE2	0.489275	0.077520	6.311587	0.0000
R-squared	0.997999	Mean dependent var		-1.060131
Adjusted R-squared	0.997925	S.D. dependent var		1.410786
S.E. of regression	0.064262	Akaike info criterion		-2.585227
Sum squared resid	0.111499	Schwarz criterion		-2.490930
Log likelihood	39.48579	F-statistic		13467.99
Durbin-Watson stat	0.281872	Prob(F-statistic)		0.000000

De este ajuste, obtenemos que el valor de las ponderaciones es α = 0,615456 y β = 0,489275; sin embargo, la suma de ambos coeficientes no es 1. En nuestro caso es la imposición máxima que se debe cumplir. Si realizamos a continuación un test de Wald, para verificar la restricción, el resultado es que se rechaza la hipótesis nula de que *c*(1)+*c*(2)=1, por lo que nos veremos obligados a realizar algún tipo de corrección sobre los coeficientes.

CUADRO 2

Wald Test:			
Equation: Untitled			
Null Hypothesis:	C(1)+C(2)=1		
F-statistic	10.32427	Probability	0.003386
Chi-square	10.32427	Probability	0.001313

Si establecemos los intervalos de confianza al 95% de confianza, los valores de los coeficientes podrían oscilar entre los siguientes valores:

$$IC_{95\%} = 0{,}615456 \pm 2{,}101 \cdot 0{,}045935 = 0{,}615456 \pm 0{,}0965094 = (0{,}5189466; 0{,}7119654)$$
$$IC_{95\%} = 0{,}489275 \pm 2{,}101 \cdot 0{,}077520 = 0{,}489275 \pm 0{,}1628695 = (0{,}3264055; 0{,}6521445)$$

Una posible solución sería dejar un coeficiente fijo, por ejemplo C(1) = *p* = 0,615456 y determinar el valor de 1-*p* = 1 – 0,615456= 0,384544. Tras esta operación, debemos asegurar que el valor obtenido para 1-*p*, es decir 0,384544, se encuentra situado en el interior del intervalo de confianza para C(2); en este caso sería valido y las ponderaciones de cada índice serían 0,615456 para INDICE1 y 0,384544 para INDICE2.

El ajuste, según nuestro modelo, sería el siguiente:

$$\ln G(v_{1t}) = 0{,}615456 L \ln F_1(I_{1t}) + 0{,}384544 \ln F_2(I_{2t}) + \varepsilon_t \,.$$

Alternativamente, podemos fijar 1-p y obtener el valor de p de igual modo que en el caso anterior. En este caso, el resultado sería:

1-p = 0,489275

p = 1 – 0,489275 = 0,510725

Sin embargo, en este caso, observamos que el resultado obtenido para p no se encuentra contenido en el intervalo que habíamos fijado al 95% de confianza.

Por tanto, en nuestro caso, el resultado válido sería el obtenido fijando p, ya que el caso alternativo no está contenido en el intervalo de confianza correspondiente al valor de p.

- ***Función de distribución ponderada***

A continuación, hemos aplicado la ponderación trabajando con las series en niveles; no sería, por tanto, una ponderación exponencial, sino lineal, partiendo de las funciones de distribución. Llevamos a cabo el análisis del peso de cada índice en el valor del activo y la ecuación de representación sería la siguiente:

$$G(v_1) = pF_1(I_{1t}) + (1-p)F_2(I_{2t})$$

CUADRO 3

Dependent Variable: ACTIVO
Method: Least Squares
Date: 03/30/00 Time: 12:09
Sample: 1 31
Included observations: 31

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INDICE1	0.699202	0.025636	27.27421	0.0000
INDICE2	0.310543	0.022977	13.51518	0.0000
R-squared	0.997962	Mean dependent var	0.564516	
Adjusted R-squared	0.997892	S.D. dependent var	0.367013	
S.E. of regression	0.016851	Akaike info criterion	-5.266510	
Sum squared resid	0.008234	Schwarz criterion	-5.173995	
Log likelihood	83.63091	F-statistic	14202.47	
Durbin-Watson stat	0.129814	Prob(F-statistic)	0.000000	

En este caso, aunque los coeficientes no suman 1 exactamente, el test de Wald no puede rechazar, al 95% de confianza, que la suma de ambos coeficientes sea 1; por tanto, en este caso, no tenemos que recurrir al establecimiento de los intervalos de confianza, como en el caso anterior.

CUADRO 4

Wald Test:			
Equation: Untitled			
Null Hypothesis:	C(1)+C(2)=1		
F-statistic	3.505309	Probability	0.071288
Chi-square	3.505309	Probability	0.061172

La representación de las ponderaciones en la función ponderada que hace uso de las funciones de distribución, sería la siguiente:

$$G(v_1) = 0.699202 F_1(I_{1t}) + 0.310543 F_2(I_{2t}).$$

- ***Función ponderada a través de la tasa de fallo***

Un tercer modo de obtener la ponderación es recurriendo al uso de la tasa de fallo; en este caso, partimos de la siguiente ecuación:

$$1 - G(v_1) = (1 - F_1(I_{1t}))^p \cdot (1 - F_2(I_{2t}))^{1-p}.$$

Para poder trabajar con las series, en primer lugar, hemos llevado a cabo la generación de las series:

1-ACTIVO =TFACTIVO
1-INDICE1=TFINDICE1
1-INDICE2=TFINDICE2

Con esta transformación, llegamos a la siguiente expresión:

$$TFG(v_1) = (TFF_1(I_{1t}))^p \cdot (TFF_2(I_{2t}))^{1-p}.$$

Con esta expresión llegamos al caso anteriormente analizado de la función ponderada directa; a partir de esta ecuación, tomando logaritmos, haremos que las relaciones sean lineales, por lo que realizaremos las siguiente transformaciones de las anteriores series:

LNTFACTIVO=LOG(TFACTIVO)
LNTFINDICE1=LOG(TFINDICE1)
LNTFINDICE2=LOG(TFINDICE2)

Una vez realizadas todas las transformaciones, pasamos a realizar la estimación de las ponderaciones, que se reflejan en el siguiente cuadro:

CUADRO 5

Dependent Variable: LNTFACTIVO
Method: Least Squares
Date: 04/14/00 Time: 11:08
Sample(adjusted): 1 30
Included observations: 30 after adjusting endpoints

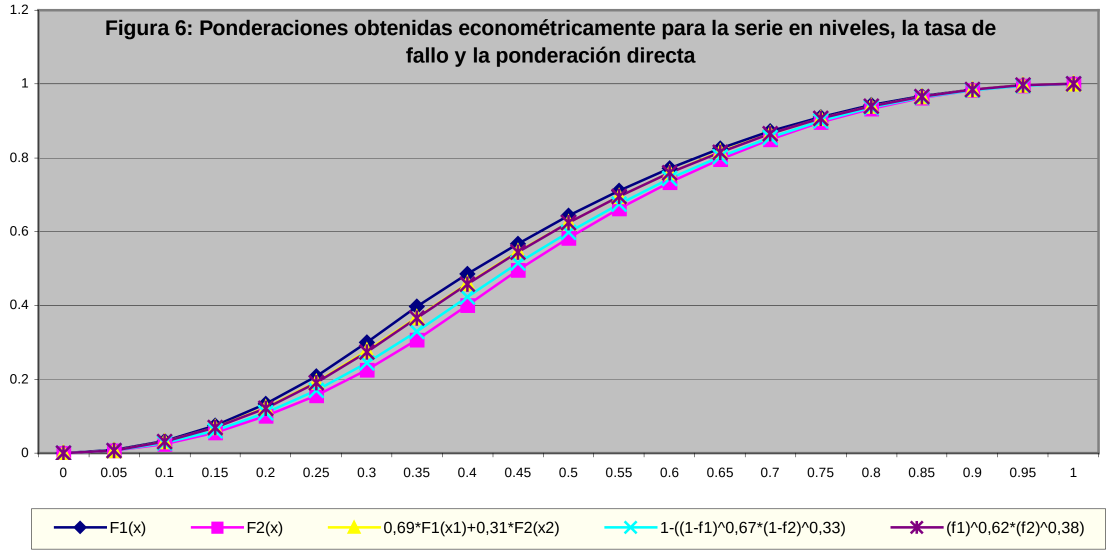
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LNTFINDICE1	0.671763	0.018956	35.43743	0.0000
LNTFINDICE2	0.335464	0.016445	20.39917	0.0000
R-squared	0.999798	Mean dependent var	-1.514151	
Adjusted R-squared	0.999791	S.D. dependent var	1.656408	
S.E. of regression	0.023941	Akaike info criterion	-4.562076	
Sum squared resid	0.016049	Schwarz criterion	-4.468662	
Log likelihood	70.43113	F-statistic	138786.3	
Durbin-Watson stat	0.112175	Prob(F-statistic)	0.000000	

Si llevamos a cabo el test de Wald, al 95% como nivel de confianza, el resultado del test rechaza la hipótesis nula de que la suma de ambos coeficientes sea igual a 1. Si estableciésemos un nivel de confianza del 99%, la hipótesis nula de que la suma de los dos coeficientes es 1 sería aceptada, que es el resultado que nosotros queremos corroborar, y la ponderación de cada índice sería p = 0,67 y 1-p = 0,33.

CUADRO 6

Wald Test:		
Equation: Untitled		
Null Hypothesis: C(1)+C(2)=1		
F-statistic	5.190656	Probability 0.030538
Chi-square	5.190656	Probability 0.022709

A continuación mostramos un grafico donde se engloban las funciones de distribución tras la aplicación de la ponderación obtenida en cada uno de los casos.



En todos los casos hemos tenido que llevar a cabo un ajuste, puesto que la suma de ambos coeficientes nunca ha resultado ser exactamente 1. Los ajustes se han llevado a cabo primando la ponderación con más peso en la estimación, es decir, dejando ésta fija y obteniendo la restante, por diferencias.

8. Conclusiones y líneas de investigación

Los trabajos precedentes sobre el método beta no han perseguido generalizar la variable explicativa única sustituyéndola por un sistema múltiple de índices. Las principales extensiones del método beta se han dirigido, hasta ahora, en otras direcciones y, principalmente, han desarrollado el uso de distribuciones triangulares, trapezoidales e incluso rectangulares como alternativas a la distribución beta, para facilitar su aplicación. El método propuesto en este trabajo permite la utilización de varios índices en la valoración agraria, así como elegir, en cada caso, de entre todas las funciones que habitualmente se utilizan para el tratamiento del riesgo (uniforme, triangular, trapezoidal, beta, etc.), aquéllas que resultan más adecuadas después de filtrar los datos a través de ellas y realizar el ajuste econométrico. Redundando en la idea anterior, las ponderaciones pueden ser mixtas, en el sentido de que no todos los índices utilizados tienen por qué tener la misma función de distribución

En cuanto a su aplicación práctica, podemos decir que la ponderación a través de las modas propuesta en la Sección 6 es fácilmente implementable en un programa informático o en una simple hoja de cálculo. La búsqueda de las ponderaciones usando métodos econométricos no resulta excesivamente complicada puesto que los datos sobre los que se va a hacer las regresiones pueden obtenerse fácilmente con una hoja de cálculo y la regresión con cualquier programa econométrico estándar. La importancia que tiene el uso de la regresión es que nos va a ayudar a seleccionar las ponderaciones más adecuadas, reduciendo la subjetividad inherente a cualquier proceso de valoración. La recogida de los datos originales se realiza por los procedimientos tradicionales. Es evidente que, cuantos más datos tengamos, más fiable será la aplicación.

Finalmente, una vez obtenida la función ponderada con la que vamos a realizar la valoración, es posible, fijando el valor de un índice, obtener la función marginal, referida al otro índice, y de esta manera llegar a construir un mapa de curvas de nivel donde pudiéramos situar, para una distancia fija a Valladolid, el valor de las fincas según sus diferentes producciones o, por otro lado, fijada una producción por hectárea, determinar el valor en función de su distancia a Valladolid. La elección de los índices ha de formar parte del arte del ingeniero o experto que entendemos puede, con este método, argumentar formalmente sus estudios sobre valoración y, en función de esta elección de índices, planificar la recogida de los datos. El tratamiento de los mismos puede ser llevado a cabo mediante el empleo de una hoja de cálculo aunque en la actualidad estamos trabajando en la elaboración de un programa informático que facilite el uso de este método.

A continuación, se detallan las principales líneas de investigación que, a nuestro entender, quedan abiertas:

1. Posibilidad de obtener, mediante el estudio econométrico, los valores de p y q para la ponderación, que podríamos comparar con el análisis estadístico de componentes principales.
2. El método descrito puede generalizarse para n índices.
3. Estudiar bajo qué condiciones se mantiene la independencia en la función ponderada.

Anexo I.

Demostración del Teorema 1. En efecto, tendremos que demostrar las siguientes desigualdades:

i. $\dfrac{F_p^d(x_1,x_2)}{F(x_1,x_2)} \geq 1$.

ii. $\dfrac{F_p^i(x_1,x_2)}{F(x_1,x_2)} \geq 1$.

Vamos a demostrar la desigualdad i. Para ello, tendremos en cuenta que:

$$\frac{(F_1(x_1))^p \cdot (F_2(x_2))^{1-p}}{F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)} \geq 1 \text{ se cumple si y sólo si } \ln \frac{(F_1(x_1))^p \cdot (F_2(x_2))^{1-p}}{F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)} \geq 0 .$$

Por otra parte,

$$\ln \frac{(F_1(x_1))^p . (F_2(x_2))^{1-p}}{F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)} = (p-1)\ln F_1(x_1) - p \ln F_2(x_2) \geq 0 ,$$

que, a su vez, es equivalente a :

$$\frac{p-1}{p} \ln F_1(x_1) \geq \ln F_2(x_2) \Leftrightarrow \frac{p-1}{p} \leq \frac{\ln F_2(x_2)}{\ln F_1(x_1)} .$$

La última desigualdad es evidente, ya que la primera parte de la misma siempre es negativa y la segunda siempre es positiva. Del mismo modo, se podría demostrar la desigualdad ii.

Demostración del Teorema 2. Haciendo uso de que la función logaritmo neperiano es monótona creciente, estudiaremos el crecimiento de $\ln F_p^d(x_1,x_2)$ respecto de *p*. Evidentemente:

$$\ln F_p^d(x_1,x_2) = p \ln F_1(x_1) + (1-p) \ln F_2(x_2) .$$

Derivando respecto de *p* la expresión anterior, obtenemos:

$$\frac{d \ln F_p^d(x_1,x_2)}{dp} = \ln F_1(x_1) - \ln F_2(x_2) = \ln \frac{F_1(x_1)}{F_2(x_2)} ,$$

de donde puede deducirse fácilmente que:

$$\frac{d \ln F_p^d(x_1, x_2)}{dp} > 0 \Leftrightarrow F_1(x_1) > F_2(x_2)$$

y

$$\frac{d \ln F_p^d(x_1, x_2)}{dp} < 0 \Leftrightarrow F_1(x_1) < F_2(x_2)\,.$$

Análogamente, para la función de distribución ponderada inversa:

$$\frac{d \ln F_p^i(x_1, x_2)}{dp} < 0 \Leftrightarrow F_1(x_1) > F_2(x_2)$$

y

$$\frac{d \ln F_p^i(x_1, x_2)}{dp} > 0 \Leftrightarrow F_1(x_1) < F_2(x_2)\,.$$

Bibliografía

1. Alonso, R. y Lozano, J. (1985). El método de las dos funciones de distribución: una aplicación a la valoración de fincas agrícolas en las comarcas Centro y Tierra de Campos (Valladolid). *Anales del INIA, Economía* **9**: 295-325.
2. Ballestero, E. (1971). Sobre la valoración sintética de tierras y un nuevo método aplicable a la concentración parcelaria. *Revista de Economía Política*, Abril: 225-238.
3. Ballestero, E. (1973). Nota sobre un nuevo método rápido de valoración. *Revista de Estudios Agrosociales* **85**: 75-78.
4. Ballestero, E. (1991a). *Economía de la empresa agraria y alimentaria*. Ediciones Mundi-Prensa, Madrid.
5. Ballestero, E. (1991b). *Métodos evaluatorios en Auditoria*. Alianza Universidad, Madrid.
6. Ballestero, E. y Caballer, V. (1982). Il metodo delle due Beta. Un procedimiento rapido nella stima dei beni fondari. *Genio Rurale* **45** (6): 33-36.
7. Caballer, V. (1975). *Concepto y Métodos de valoración agraria*. Ediciones Mundi-Prensa, Madrid.
8. Caballer, V. (1994): *Métodos de valoración de empresas*. Ediciones Pirámide, Madrid.
9. Cañas, J.A., Domingo, J. y Martínez, J.A. (1994). Valoración de tierras en las campiñas y la Subética de la provincia de Córdoba por el método de las funciones de distribución. *Investigación Agraria. Serie Economía* **9** (3): 447-467.
10. Díaz, E., Sumpsi, J.M., Urbiola, J. y Varela, V. (1983). El mercado y los precios de la tierra. *Papeles de Economía Española* **16**: 169-181.
11. García, J., Cruz, S. y Andújar, A.S. (1999). Il metodo delle due funzioni di distribuzione: Il modello triangolare. Una revisione. *Genio Rurale* **11**: 3-8.
12. García, J., Cruz, S. y Rosado, Y. (2000). Las funciones de distribución multivariantes en la teoría general de valoración. *Actas de la XIV Reunión Asepelt-España*, Oviedo (publicación en CD-Rom).
13. García, J., Trinidad, J.E. y Gómez, J. (1999). El método de las dos funciones de distribución: la versión trapezoidal. *Revista de Estudios Agrosociales y Pesqueros* **185**: 57-81.

14. Guadalajara, N. (1996). *Valoración Agraria. Casos Prácticos.* Ediciones Mundi-Prensa, Madrid.
15. Romero, C. (1977). Valoración por el método de las dos distribuciones Beta: una extensión. *Revista de Economía Política* **75**: 47-62.
16. Romero, C. (1989). *Introducción a la financiación empresarial y al análisis de bursátil.* Alianza, Madrid.
17. Romero, C. (1991): *Técnicas de programación y control de proyectos*. Ediciones Pirámide, Madrid.
18. Suárez Suárez, A. S. (1991): *Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*. Editorial Pirámide, Madrid.