

BORDÓN

Revista de Pedagogía

NÚMERO MONOGRÁFICO / *SPECIAL ISSUE*

Educación STEM: tecnologías emergentes para
el aprendizaje científico
STEM education: emerging technologies for science learning

Alicia Palacios Ortega, Daniel Moreno Mediavilla
y Virginia Pascual López (editores invitados / *guest editors*)



Volumen 74
Número, 4
2022

SOCIEDAD ESPAÑOLA DE PEDAGOGÍA

ANÁLISIS DE *APPLETS* DE GEOGEBRA PARA LA ENSEÑANZA DEL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Analysis of GeoGebra applets for teaching the limit of a function

ÁLVARO BARRERAS⁽¹⁾, LUIS DUBARBIE⁽¹⁾ Y ANTONIO M. OLLER-MARCÉN⁽²⁾

⁽¹⁾ Universidad Internacional de La Rioja (España)

⁽²⁾ Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza (España)

DOI: 10.13042/Bordon.2022.93361

Fecha de recepción: 07/02/2022 • Fecha de aceptación: 21/07/2022

Autor de contacto / Corresponding author: Álvaro Barreras. E-mail: alvaro.barreras@unir.net

Cómo citar este artículo: Barreras, Á., Dubarbie, L. y Oller-Marcén, A. M. (2022). Análisis de *applets* de GeoGebra para la enseñanza del límite de una función. *Bordón, Revista de Pedagogía*, 74(4), 65-83. <https://doi.org/10.13042/Bordon.2022.93361>

INTRODUCCIÓN. La importancia de GeoGebra como una de las principales herramientas que ofrecen a los docentes de matemáticas la posibilidad de trabajar con simulaciones virtuales en sus aulas es indiscutible. Sin embargo, los recursos del repositorio oficial de GeoGebra no pasan ningún proceso de revisión. Por lo tanto, el criterio del docente a la hora de seleccionar este tipo de recursos es clave y se hacen necesarias herramientas que permitan analizar *applets* de GeoGebra para su implementación. En particular, este tipo de recursos ofrecen numerosas ventajas para la enseñanza del concepto matemático de límite de una función, frente a otro tipo de herramientas. **MÉTODO.** En este trabajo se analiza la idoneidad didáctica de *applets* de GeoGebra para la enseñanza del límite de una función. Se ha realizado un estudio exploratorio y descriptivo. El análisis se ha llevado a cabo mediante un enfoque deductivo con base en cinco variables diferentes (tipo de límite, interactividad, imagen conceptual, representación y acción). La muestra analizada, elegida mediante un muestreo de tipo intencional, es de 150 *applets* del repositorio de materiales de GeoGebra. **RESULTADOS.** Se muestran los resultados tras analizar las cinco variables establecidas para cada uno de los *applets* estudiados. También se analiza la influencia de la interactividad con el resto de las variables, así como la influencia de la cantidad de representaciones del límite en los *applets*. **DISCUSIÓN.** En el análisis de la idoneidad didáctica realizado, destaca la importancia de la variable interactividad, por potenciar el desarrollo de la mayoría de las imágenes conceptuales del límite. También resulta positivo el uso de una mayor cantidad de sistemas de representación del límite en un *applet*, pues favorece el desarrollo de varias acciones en dichos sistemas de representación.

Palabras clave: Enfoque ontosemiótico, Educación matemática, Usos de la tecnología en educación, Recursos educativos.

Introducción

Desde su creación, GeoGebra ha experimentado un éxito sin precedentes entre los docentes de matemáticas, llegando a contar con cientos de miles de usuarios mensuales y con más de un millón de actividades en su repositorio (Hohenwarter y Lavicza, 2007). Sin embargo, posiblemente a consecuencia de este éxito, no existe ningún proceso de revisión de expertos que filtre de algún modo los *applets* depositados en el repositorio oficial de GeoGebra. Esto implica que, en la práctica, muchos de ellos estén incompletos y algunos puedan eventualmente presentar errores matemáticos.

Además, hemos de tener en cuenta que estos *applets* son frecuentemente utilizados como recursos formativos por personas distintas a quienes los han creado. Por ello, son necesarias investigaciones que los analicen desde un punto de vista didáctico y que ofrezcan a los docentes estrategias para analizar y evaluar dichos *applets*. De este modo, los usuarios podrán tomar una decisión respecto a su utilización basada en criterios matemáticos y didácticos. El desempeño docente en el uso de otras herramientas como vídeos educativos o redes sociales para la enseñanza de las matemáticas ha sido analizado en trabajos como Cid *et al.* (2018) y García *et al.* (2016).

Problemáticas similares surgen en ámbitos como los recursos educativos en línea o los vídeos educativos matemáticos. Así, Turney *et al.* (2009) ponen de manifiesto que el uso de tecnología puede provocar que los estudiantes desarrollen estrategias de aprendizaje inadecuadas. Por su parte, Beltrán-Pellicer *et al.* (2018) identifican carencias recurrentes en su análisis de vídeos de YouTube que pueden interferir con las secuencias didácticas diseñadas por los docentes. Además, se expone que el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino *et al.*, 2007) permite abordar la problemática planteada desde el concepto de idoneidad didáctica (Burgos *et al.*, 2020; Godino, 2013).

Considerando la situación expuesta, en este trabajo pretendemos analizar algunas características fundamentales de *applets* dedicados al trabajo con el concepto de límite funcional depositados en el repositorio de GeoGebra. Se ha elegido este objeto matemático debido a su importancia (Claros *et al.*, 2007), así como al potencial uso de GeoGebra en su enseñanza y aprendizaje (Hutkemri, 2014). En particular, los objetivos específicos de este trabajo son:

- Determinar las imágenes conceptuales asociadas al concepto de límite funcional presente en los *applets* analizados.
- Analizar la presencia de distintos sistemas de representación y de las acciones entre ellos promovidas por dichos *applets*.

Estos dos objetivos y sus posibles influencias mutuas, junto con características relacionadas con la interactividad de los *applets* considerados, nos permiten estudiar aspectos clave relacionados con la idoneidad epistémica de estos recursos.

Este trabajo está estructurado de la siguiente manera: en el siguiente apartado se expone el marco teórico y contexto de la investigación. Posteriormente, se presenta el método seguido en el estudio realizado, así como las variables consideradas. Después se muestran los resultados obtenidos en el análisis realizado. Finalmente, se presentan las conclusiones y una discusión sobre la investigación llevada a cabo.

Marco teórico

El enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino *et al.*, 2007) considera seis tipos de objetos matemáticos primarios, cuya interacción permite describir la actividad matemática:

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos).

- Situaciones-problemas (aplicaciones intra- y extramatemáticas, ejercicios, problemas, etc.).
- Conceptos dados por definiciones o descripciones (límite, función, etc.).
- Proposiciones, propiedades o atributos.
- Procedimientos (operaciones, algoritmos, técnicas).
- Argumentos utilizados para validar y explicar las proposiciones y los procedimientos (deductivos, inductivos).

Entre otros muchos aspectos, el EOS ofrece herramientas útiles para el análisis de recursos digitales para la enseñanza de las matemáticas (como los *applets* de GeoGebra considerados) y pone de manifiesto, en particular, la necesidad de analizar la idoneidad didáctica de los recursos utilizados por el docente.

La noción de idoneidad didáctica, así como sus dimensiones, criterios y principales indicadores, se encuentra desarrollada en Godino (2013). Este constructo se define como “el grado en que un proceso de instrucción reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado, siendo el principal criterio la adaptación entre los significados personales construidos por los alumnos (aprendizaje) y los significados institucionales, ya sean pretendidos o implementados (enseñanza), considerando la influencia del entorno” (Burgos *et al.*, 2020, pp. 29-30). Este proceso de instrucción debe articular de manera coherente y sistemática seis componentes: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica (Godino *et al.*, 2007). La noción de idoneidad didáctica, en sus distintas dimensiones, es útil tanto en el diseño como en la valoración de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino *et al.*, 2019).

La idoneidad epistémica hace referencia a la “representatividad del significado institucional implementado o pretendido, respecto de un significado de referencia” (Godino *et al.*, 2007, p. 133). A su vez, Godino *et al.* (2012) señalan

los distintos componentes de la idoneidad epistémica, entre los que cabe destacar los lenguajes y las reglas (definiciones, proposiciones y procedimientos). Estos mismos autores proporcionan además indicadores para cada uno de estos componentes. En el caso de las reglas, se proponen indicadores tales como que “las definiciones y procedimientos sean claros y correctos” o que “se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema adaptados al nivel educativo dado”. En lo relativo a los lenguajes, uno de estos indicadores es el uso de “un amplio repertorio de representaciones (materiales, icónicas y simbólicas) para modelizar problemas e ideas matemáticas, analizando la pertinencia y potencialidad de uno u otro tipo de representación y realizando procesos de traducción entre las mismas” (Godino *et al.*, 2012, p. 348).

Por otro lado, el concepto de límite es fundamental en el ámbito del análisis, y las dificultades que los estudiantes parecen encontrar para su comprensión se deben, en parte, a que esta implica la articulación de multitud de elementos relacionados con aspectos como su existencia, su carácter estático o dinámico, etc., que “no pueden ser generados puramente a partir de su definición matemática” (Cornu, 2002, p. 153). Asimismo, esta complejidad implica que los estudiantes puedan formarse distintas imágenes o modelos del concepto de límite, que no siempre resultan adecuados (Williams, 1991; Contreras y García, 2011) y que pueden variar en función de si se trata de un límite finito o infinito, o de si se considera en un punto o en el infinito (Sánchez-Compañía, 2012).

Siguiendo el trabajo de Tall y Vinner (1981), Przenioslo (2004, p. 104) considera la noción de imagen conceptual como “la estructura cognitiva que contiene todos los tipos de asociaciones y concepciones relacionadas con un concepto [...] incluyendo intuiciones, elementos de comprensión formal, pautas establecidas, procedimientos aplicados a distintas situaciones y estrategias operacionales”. En su estudio empírico con estudiantes universitarios, se identifican

seis grandes grupos de imágenes conceptuales asociadas al límite de una función que se identifican con base en lo que la autora denomina su elemento clave. Así, distingue entre imágenes conceptuales focalizadas en la idea de:

- “Entorno”.
- “Valores que se aproximan”.
- “Gráfica que se aproxima”.
- “Estar definida en el punto”.
- “El límite en el punto coincide con la función en el punto”.
- “Aproximación algorítmica esquemática”.

Evidentemente, estos elementos clave no son excluyentes entre sí, de tal modo que la idea de límite de muchos estudiantes combina concepciones asociadas con más de uno de ellos. Sin embargo, cabe resaltar que Przenioslo (2004) considera como “eficientes” únicamente las dos primeras, entendiendo por eficiente aquella imagen conceptual que permite al estudiante comprender las propiedades y teoremas relacionados con el límite de una función, así como comprender sus vínculos con otras nociones matemáticas.

A menudo la actividad matemática necesita utilizar diferentes sistemas de representación semiótica que se puedan utilizar libremente según la tarea que realizar. Aunque algunos procesos son más fáciles en un sistema semiótico que en otro, o incluso pueden realizarse en uno solo, lo cierto es que en muchos casos no se utiliza un único sistema de representación, sino que se precisan al menos dos, bien sea de manera implícita o explícita (Duval, 2006). A este respecto, Socas (2007) señala distintos tipos de acciones que pueden llevarse a cabo cuando se utilizan distintas representaciones:

- Reconocimiento de un objeto o de alguno de sus elementos en un sistema de representación concreto.
- Transformaciones internas en un sistema de representación, a las que Duval (2006) denomina tratamientos.

- Transformaciones externas entre distintos sistemas de representación, a las que Duval (2006) denomina conversiones.
- Coordinación entre distintos sistemas de representación.

La realización de estas acciones en el contexto de un objeto matemático concreto caracteriza, en cierto modo, la actividad matemática y su presencia es, como hemos visto, un indicador de idoneidad epistémica. De hecho, el lenguaje matemático surge asociado a la representación de los objetos matemáticos y a su dinámica en y entre los registros semióticos (Pecharromás, 2013).

En el contexto que nos ocupa, Blázquez y Ortega (2001, p. 226) sostienen que “la utilización de distintos registros [...] mejora la comprensión del concepto de límite”. Estos autores consideran cuatro sistemas de representación fundamentales asociados al concepto de límite: verbal, numérico, gráfico y algebraico. Cada uno de ellos tiene unas potencialidades y limitaciones que pueden mostrar u ocultar distintas imágenes conceptuales de la idea de límite (Palomino *et al.*, 2009). Por otro lado, algunas investigaciones (Ward *et al.*, 2013) han señalado que las transformaciones externas entre distintos sistemas de representación parecen ser las acciones que conllevan una mayor dificultad para los docentes.

El uso de *software* como GeoGebra facilita que los estudiantes trabajen simultáneamente con diversos sistemas de representación y que actúen sobre ellos en un contexto de cálculo diferencial (Caligaris *et al.*, 2015). La utilización de este *software*, especialmente por sus características dinámicas e interactivas, puede contribuir a mejorar la comprensión del concepto de límite (Sari, 2017). Por tanto, a la hora de analizar los *applets* de GeoGebra, resulta primordial atender al concepto de interactividad de dichos recursos. En este trabajo adoptamos el enfoque de Roussou *et al.* (2006, p. 2), que definen la interactividad como “la capacidad de moverse libremente por un entorno virtual, experimentarlo de primera

mano y desde múltiples puntos de vista, modificar sus elementos, controlar parámetros o de responder al *feedback* ofrecido por el sistema”.

Método

Teniendo en cuenta los objetivos señalados anteriormente, se ha abordado un estudio de tipo exploratorio y fundamentalmente descriptivo (Leavy, 2017).

Selección de la muestra

Se ha optado por realizar un muestreo de tipo intencional, *purposeful sampling* en la terminología de Creswell (2002, p. 206). Se trata de un tipo de muestreo no probabilístico en el que se seleccionan los elementos de la muestra con el fin de obtener información útil para la comprensión del fenómeno estudiado.

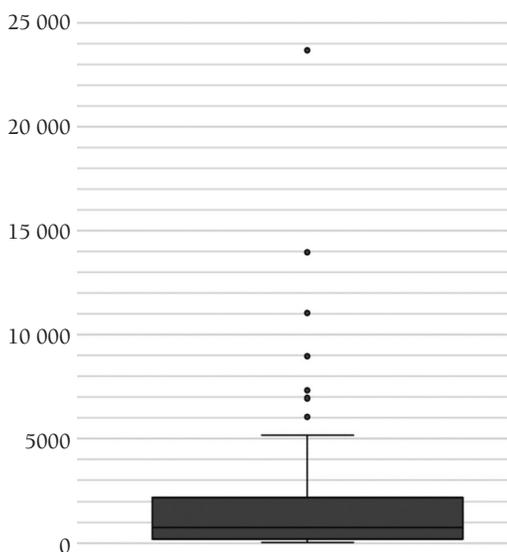
Así, se realizó una consulta el 8 de mayo de 2021 en el apartado de materiales de la web de GeoGebra¹, haciendo uso de la herramienta de búsqueda en forma de grafo y siguiendo la ruta “Matemáticas → Cálculo → Límites”. De este modo, se seleccionaron inicialmente los 150 primeros *applets*. Se eligieron los primeros porque se pretendía considerar la situación de un docente que accede al repositorio en busca de recursos para su clase. Todos los recursos elegidos eran *applets* individuales y no libros.

A continuación, se realizó una primera revisión de los *applets* para eliminar aquellos que no proporcionaran información útil para la investigación. En particular, se eliminaron los *applets* que no abordaban única y específicamente el concepto de límite de una función real de variable real en un punto o en el infinito (algunos trataban el límite de sucesiones, la derivabilidad, el límite de funciones de varias variables, etc.). De igual forma, se descartaron aquellos *applets* que resultaban meramente expositivos, es decir, que no hacían uso de las

funcionalidades dinámicas de GeoGebra (Hohenwarter *et al.*, 2009).

Este proceso de cribado de datos conllevó el descarte de 49 *applets*. Por lo tanto, el estudio finalmente se realizó con los 101 *applets* restantes, que se consideró una cantidad suficiente para los objetivos marcados. El número medio de visualizaciones de estos *applets* era 1882. Aunque el objetivo no era la selección de los *applets* con más visualizaciones (puesto que, además, estos no aparecen ordenados por el número de visualizaciones tras una búsqueda), sí que hay *applets* con un gran número de visualizaciones entre los elegidos (ver figura 1).

FIGURA 1. Número de visualizaciones de los *applets* analizados



Análisis de los datos

El análisis se llevó a cabo con base en cinco variables, adoptando un enfoque deductivo en el que las categorías se derivan del marco teórico. En la tabla 1 se detallan dichas variables, las categorías correspondientes a cada una de ellas y los criterios considerados para la clasificación de los *applets*.

TABLA 1. Variables y categorías para el análisis de los *applets* y criterios de asignación

Variable	Categorías y códigos	Criterios
Tipo de límite (Sánchez-Compañía, 2012)	En un punto (LP)	Se calcula el límite en un punto
	En el infinito (LI)	Se calcula el límite en el infinito
Interactividad (Roussou <i>et al.</i> , 2006)	Modificar elementos (ME)	Se pueden modificar elementos como la función o el punto donde se quiere calcular el límite
	Controlar parámetros (CP)	Se pueden modificar parámetros que ofrecen información relevante. Por ejemplo, punto que se aproxima al valor en que se calcula el límite
	Permite responder (PR)	El usuario puede introducir una respuesta y se obtiene <i>feedback</i>
Imagen conceptual (Przenioslo, 2004)	Entorno (E)	Aparece explícitamente un entorno del punto donde se quiere calcular el límite y/o valor de la función Aparece la definición de límite mediante entornos o razonamientos de aproximación a un punto
	Valores que se aproximan (VA)	Aparecen representados (o en una tabla) los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos al punto donde se calcula el límite
	Gráfica que se aproxima (GA)	Se representa gráficamente el punto $(x, f(x))$ para valores de x cercanos al punto donde se calcula el límite Se representa el comportamiento asintótico de la función
	Estar definida en el punto (D)	Se incide en el hecho de que la función tiene que estar definida en el punto donde se quiere calcular el límite
	El límite en el punto coincide con la función en el punto (LF)	Se incide en el hecho de que el límite en el punto donde se quiere calcular coincide con el valor de la función en ese punto
	Aproximación algorítmica esquemática (AA)	Se incluyen las ideas de los pasos que seguir para calcular el límite (manipulaciones algebraicas)
	Sistemas de representación (Blázquez y Ortega, 2001)	Verbal (V)
Numérica (N)		Se incluyen valores numéricos de puntos y/o sus imágenes en un entorno del punto donde se quiere calcular el límite
Gráfica (G)		Se representa gráficamente la función y/o la idea de límite
Algebraica (A)		Se incluye la expresión algebraica de la función y/o del límite Se incluyen procedimientos algebraicos de resolución de límites
Acciones (Socas, 2007)	Reconocimiento (R)	Se presenta el objeto de límite funcional
	Transformación interna (TI)	Se hacen (o el usuario puede hacer) transformaciones dentro de una misma representación. Por ejemplo, operaciones para calcular un límite
	Transformación externa (TE)	El usuario puede hacer transformaciones entre diferentes representaciones. Por ejemplo, escribir la ecuación de una función representada gráficamente o viceversa
	Coordinación (C)	Actualización automática de un tipo de representación al modificar otra representación. Por ejemplo, al modificar la expresión algebraica de una función o el punto donde se quiere calcular el límite, entonces se modifica la representación gráfica

El análisis realizado, de carácter fundamentalmente cuantitativo, se ha llevado a cabo en dos fases. En la primera se han analizado las características de los *applets*, clasificando cada uno de ellos en función de las variables y categorías de la tabla 1. En la segunda se han analizado algunos de los posibles vínculos existentes entre las variables consideradas.

Para abordar algunas de las posibles amenazas, tanto internas como externas, a la credibilidad que puede aparecer en relación con este tipo de estudios (Onwuegbuzie y Leech, 2007), y contribuir a la validez de los resultados, se orquestó un proceso de triangulación de investigadores (Flick, 2004). La muestra se dividió en tres subconjuntos y cada uno de ellos fue analizado y codificado por dos de los investigadores del equipo. En aquellos casos en los que surgieron discrepancias entre ambos, se llegó a una decisión colegiada con la intervención del investigador restante. A través de este proceso se dio lugar a los criterios mencionados en la tabla 1.

Resultados

Características de los *applets*

En primer lugar, abordamos un análisis descriptivo de los *applets* considerados. En particular, estudiamos las características de estos según las variables descritas en la tabla 1.

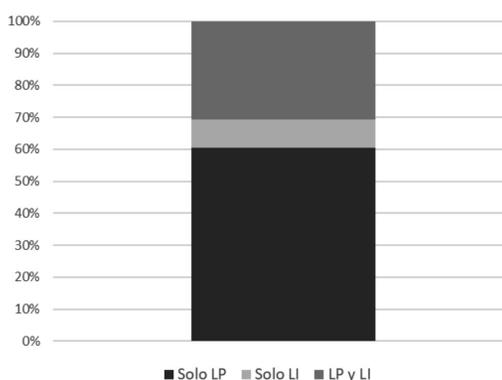
Tipo de límite

Analizamos el tipo de límite que se aborda en cada uno de los *applets* considerados, es decir, si se estudian límites puntuales o límites en el infinito.

Se observa un claro predominio de *applets* centrados únicamente en el límite en un punto frente al límite en el infinito. La figura 2 muestra que menos del 10% de los *applets* se centran de forma exclusiva en el límite en el infinito,

mientras que en torno a un 60% se centran únicamente en el límite en un punto. Menos de la tercera parte de los *applets* abordan conjuntamente ambos tipos de límites.

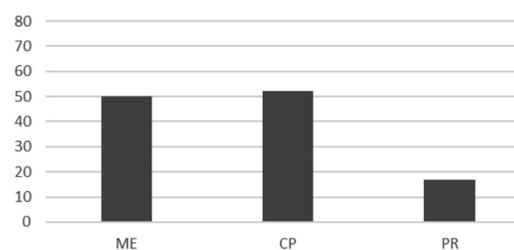
FIGURA 2. Tipo de límite abordado en los *applets*



Interactividad

De los 101 *applets* analizados, 15 no se ajustan a la definición de interactividad dada por Roussou *et al.* (2006). El porcentaje de estos *applets* no interactivos (14.85%) resulta relativamente elevado.

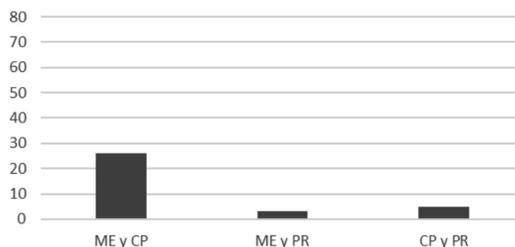
FIGURA 3. Categorías relativas a la interactividad de los *applets*



En la figura 3 se presentan los tipos de interactividad de los 86 *applets* en los que esta se da. La modificación de elementos y el control de parámetros son los rasgos mayoritarios entre los *applets* interactivos, con una presencia similar. Menos de 20 de los *applets* interactivos permiten dar respuesta en ellos a las cuestiones planteadas.

Resulta relevante estudiar la presencia conjunta en los *applets* de dos o más categorías relativas a la interactividad (véase figura 4). Como podemos apreciar, el número de *applets* que presenta al menos dos categorías relativas a la interactividad es bajo.

FIGURA 4. Presencia de dos categorías relativas a la interactividad



Como cabía esperar, la mayor frecuencia se corresponde con aquellos *applets* en los que se pueden modificar elementos y cambiar parámetros de manera simultánea. Por otro lado, aquellos *applets* que han sido diseñados para poder dar una respuesta apenas permiten modificar elementos ni controlar parámetros.

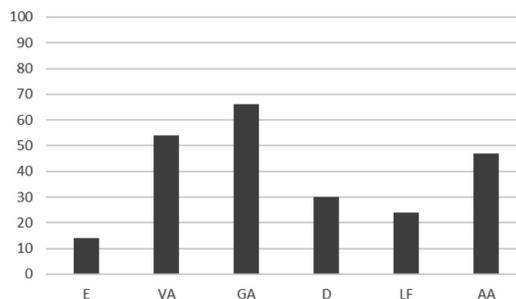
Finalmente, tan solo ha sido posible identificar un *applet* que satisface las tres condiciones propias de la definición de interactividad utilizada.

Imagen conceptual

En la figura 5 se presentan las frecuencias con las que cada una de las imágenes conceptuales consideradas aparece en los *applets* analizados.

Los *applets* analizados contribuyen mayoritariamente a la construcción de la imagen conceptual del límite de una función centrada en la idea de “gráfica que se aproxima”, seguida de las imágenes conceptuales centradas en las ideas de “valores que se aproximan” y de “aproximación algorítmica esquemática”. Observamos que tan solo 14 de los *applets* promueven una imagen conceptual centrada en la idea de “entorno”.

FIGURA 5. Imágenes conceptuales fomentadas por los applets



Al restringirse a las imágenes conceptuales eficientes, centradas en las ideas de “entorno” y de “valores que se aproximan”, se ha identificado únicamente un *applet* en el que se promueven ambas imágenes conceptuales de manera simultánea. Sin embargo, se ha observado que 39 de los *applets* promueven únicamente imágenes conceptuales consideradas ineficientes.

Cabe mencionar que se ha identificado un *applet* que no ha podido clasificarse de acuerdo con estas imágenes conceptuales asociadas a la noción de límite de una función.

Sistemas de representación

La presencia de los distintos sistemas de representación considerados se muestra en la figura 6. Como puede apreciarse, existe un predominio de las representaciones gráficas y algebraicas frente a las numéricas y verbales, siendo esta última claramente minoritaria.

FIGURA 6. Representaciones del límite utilizadas en los applets

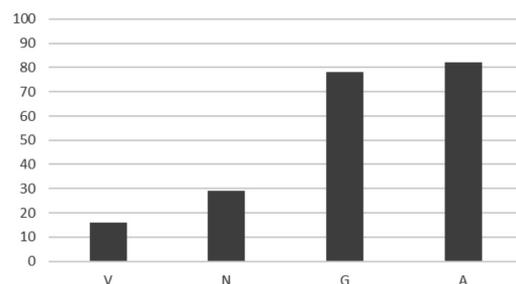


Tabla 2. Applets que presentan alguna representación del límite

Sistemas de representación		
Cantidad	Representaciones	N (%)
1 sistema de representación (32/101)	V	0 (0%)
	N	0 (0%)
	G	16 (50%)
	A	16 (50%)
2 sistemas de representación (39/101)	V y G	1 (2.56%)
	V y A	5 (12.82%)
	N y G	2 (5.12%)
	N y A	1 (2.56%)
	G y A	30 (76.94%)
3 sistemas de representación (25/101)	V, N y A	1 (4%)
	V, G y A	4 (16%)
	N, G y A	20 (80%)
4 sistemas de representación (5/101)		

En la tabla 2 se presenta, para cada situación (considerando el número de sistemas de representación utilizados), la frecuencia de cada representación usada, de manera aislada o conjunta.

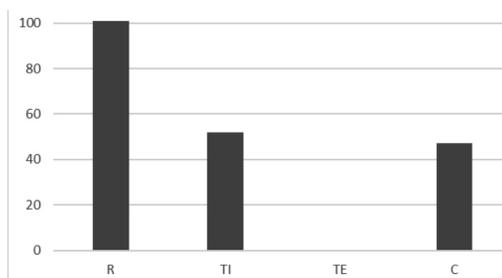
De los 101 applets analizados, 32 hacían uso de un único sistema de representación (ver tabla 2). En estos casos, no hay una preferencia clara entre el sistema de representación algebraico o gráfico. Además, las representaciones verbal y numérica nunca se utilizan de manera aislada.

En los 69 applets restantes, se utiliza más de un sistema de representación de forma combinada. Lo más habitual es encontrar la combinación de dos sistemas de representación. Cuando esto sucede, en casi el 77% de los casos se combinan las representaciones gráfica y algebraica. También resulta destacable el bajo número de applets (inferior al 5%) en el que se han identificado los cuatro posibles sistemas de representación considerados.

Acciones

En este apartado se analiza la presencia de las distintas acciones en relación con uno o más sistemas de representación (véase figura 7).

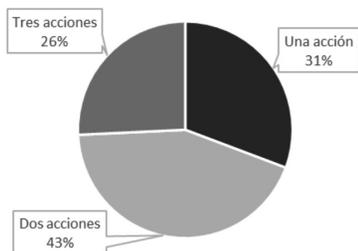
Figura 7. Acciones presentes en los applets



Como cabía esperar, en todos los applets analizados se promueve el reconocimiento de alguno de los elementos propios del límite funcional en algún sistema de representación. Por otro lado, no se ha identificado ningún applet en el que se realicen transformaciones externas

entre distintos sistemas de representación. En algo más de la mitad de los *applets* se realizan transformaciones internas dentro de un mismo sistema de representación y en casi la mitad se lleva a cabo un proceso de coordinación entre sistemas de representación del límite.

FIGURA 8. Cantidad de acciones identificadas en los *applets*



Un buen número de los *applets* considerados promueven más de una acción vinculada a los sistemas de presentación que utilizan (véase figura 8). Evidentemente, teniendo en cuenta la figura 7, en aquellos *applets* en los que solo se identifica una única acción, esta consiste en el reconocimiento de un objeto o de alguno de sus elementos en un sistema de representación concreto.

Finalmente, solo la cuarta parte de los *applets* involucran tres acciones. En este caso, dado que en ninguno de los *applets* se desarrollan transformaciones externas, se trata del reconocimiento de un objeto, de transformaciones internas en un sistema de representación y de la coordinación entre distintos sistemas de representación del límite funcional.

Influencia del carácter interactivo

Se analiza ahora la posible influencia de la interactividad de los *applets* sobre el resto de las variables analizadas. Para ello, se debe considerar que, de los 101 *applets* analizados, se han clasificado 86 como interactivos, mientras que los 15 restantes son no interactivos (apartado “Interactividad”).

Tipo de límite

En la figura 9 se observa la distribución del tipo de límite, puntual o en el infinito, considerado en cada *applet* en función de su carácter interactivo o no. La interactividad de los *applets* no parece ser una condición relevante para el estudio de un tipo de límite u otro.

FIGURA 9. Tipo de límite abordado en función de la interactividad de los *applets*

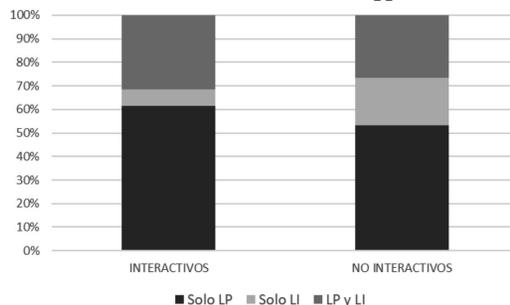
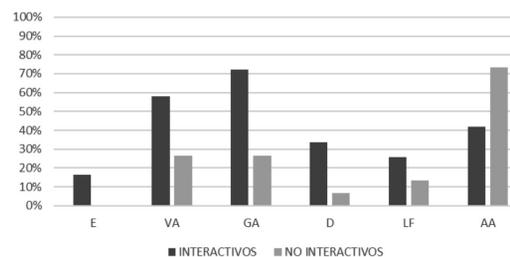


Imagen conceptual

En la figura 10 se observa la distribución de las imágenes conceptuales promovidas por los *applets* en función de su carácter interactivo o no.

FIGURA 10. Vínculo entre la interactividad y las imágenes conceptuales



Respecto a las imágenes conceptuales, se observa que la interactividad resulta decisiva para el desarrollo de la imagen conceptual centrada en la idea de “entorno” (E), ya que todos los *applets* identificados que promueven esta imagen conceptual son interactivos.

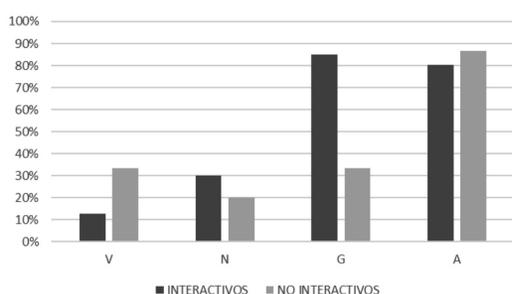
En general, se aprecia que el porcentaje de *applets* interactivos que fomentan cada una de las imágenes

conceptuales es claramente superior al de *applets* no interactivos, con la única excepción de la imagen conceptual centrada en la idea de “aproximación algorítmica esquemática”.

Sistemas de representación

En la figura 11 se observa la distribución de los sistemas de representación utilizados en los *applets* en función de su carácter interactivo o no.

FIGURA 11. Representaciones utilizadas en función de la interactividad de los *applets*



Se observa cómo la interactividad se convierte en un aspecto muy importante que favorece la utilización del registro gráfico. También se aprecia que los *applets* no interactivos tienen mayor predisposición a la utilización del registro verbal. Finalmente, el uso de la representación algebraica y numérica del límite no parece

depender de la interactividad de los *applets*, ya que en ambos casos aparecen porcentajes similares.

En la tabla 3 se consideran, además de los sistemas de representación utilizados, la cantidad de los mismos que aparecen en cada *applet*.

El análisis de la cantidad de registros que se utilizan para exponer el límite de una función muestra una mayor tendencia a emplear una única representación entre los *applets* no interactivos, haciendo uso en su mayoría de la representación algebraica del límite. Sin embargo, en el caso de los *applets* interactivos, el uso de la representación gráfica supera por un pequeño porcentaje a la representación algebraica. Por último, en ninguno de los casos se utilizan las representaciones verbal y numérica de manera aislada.

El porcentaje de *applets* en los que se hace uso de dos representaciones del límite de una función son similares en ambos casos. No obstante, en la gran mayoría de los *applets* interactivos, se combinan las representaciones gráfica y algebraica, algo que no sucede cuando se trata de *applets* no interactivos. Respecto al uso de tres sistemas de representación, esto sucede con un porcentaje mucho mayor en el caso de los *applets* interactivos.

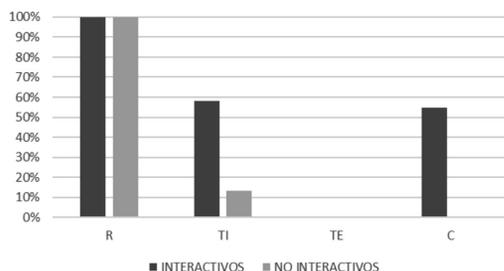
TABLA 3. Cantidad de representaciones utilizadas en función de la interactividad

		Interactivos	No interactivos
Una representación	Total	25 (29.07%)	7 (46.66%)
	V	0 (0%)	0 (0%)
	N	0 (0%)	0 (0%)
	G	14 (56%)	2 (28.57%)
	A	11 (44%)	5 (71.42%)
Dos representaciones	Total	33 (38.37%)	6 (40%)
	G y A	29 (87.87%)	1 (16.66%)
Tres representaciones		24 (27.90%)	1 (6.66%)
Cuatro representaciones		4 (4.65%)	1 (6.66%)

Acciones

La figura 12 recoge la distribución de las distintas acciones fomentadas entre los sistemas de representación utilizados en los *applets*, en función de su carácter interactivo o no.

FIGURA 12. Influencia de la interactividad de los *applets* en las acciones



Los *applets* no interactivos se limitan casi exclusivamente al reconocimiento de alguno de los elementos del límite funcional en algún sistema de representación. La realización de transformaciones internas dentro de un sistema de representación y la coordinación entre distintos sistemas de representación son prácticamente exclusivas de los *applets* interactivos.

Como en la sección anterior, se ha estudiado la posibilidad de realizar varias acciones en un mismo *applet* (véase tabla 4).

El porcentaje de *applets* en los que solo se puede realizar una acción es muy superior en el caso de

los no interactivos. Por su parte, la situación es la contraria en el caso de los *applets* que permiten ejecutar dos o tres acciones. De hecho, ningún *applet* no interactivo permite realizar tres acciones simultáneamente. Se observa que en ninguno de los *applets* no interactivos consultados se lleva a cabo la acción de coordinación entre sistemas de representación.

Influencia de la variedad de sistemas de representación

En este se analiza la influencia que tiene la variedad de sistemas de representación del límite de una función utilizados en los *applets* sobre las acciones que se pueden llevar a cabo dentro de dicho *applet*.

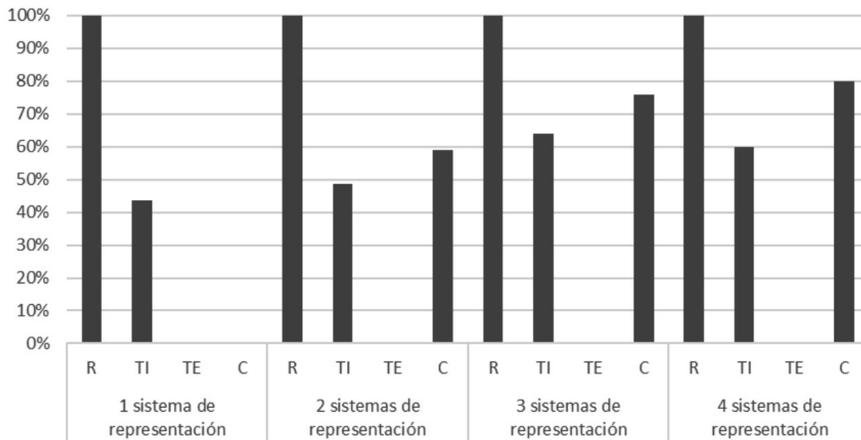
Tal y como vimos en el apartado “Sistemas de representación”, 32 de los *applets* analizados hacían uso de un único sistema de representación. En la figura 13 mostramos las acciones identificadas en este caso.

Dado que estos *applets* tan solo utilizan un sistema de representación del límite de una función, no puede haber transformaciones externas ni coordinación entre sistemas de representación. Sin embargo, merece la pena señalar que el número de *applets* en los que se llevan a cabo transformaciones internas dentro del sistema de representación considerado (ya sea gráfico o algebraico, véase tabla 2) no llega a la mitad.

TABLA 4. Acciones en función de la interactividad

	Interactivos (86/101)		No interactivos (15/101)	
	Acciones	N (%)	Acciones	N (%)
Una acción	R	18/86 (20.93%)	R	13/15 (86.67%)
Dos acciones	R y TI	21/86 (24.42%)	R y TI	2/15 (13.33%)
	R y C	18/86 (20.93%)	R y C	0/15 (0%)
Tres acciones	R, TI y C	29/86 (33.72%)	R, TI y C	0/15 (0%)

FIGURA 13. Sistemas de representación y acciones



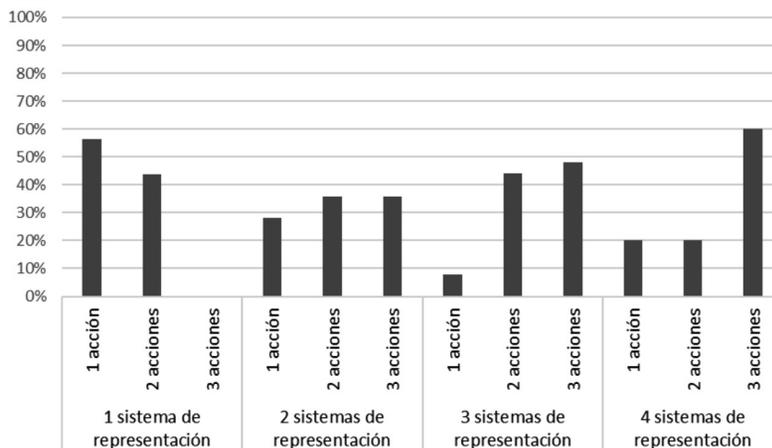
Cuando se analizan los *applets* que utilizan dos sistemas de representación del límite, dejando de lado el reconocimiento, que se da siempre, observamos que menos de la mitad fomentan la realización de transformaciones internas, siendo mayor el porcentaje de *applets* en los que se hace uso de la coordinación entre estos dos sistemas de representación.

En el caso de *applets* en los que se emplean más de tres sistemas de representación del límite, la presencia relativa de las transformaciones internas en un sistema de representación y de la coordinación entre sistemas de representación es

considerablemente mayor que en los casos en los que se consideran una o dos representaciones del límite.

En la figura 14 se observa que, al considerar los *applets* que utilizan dos representaciones del límite, la proporción de *applets* que permiten realizar una única acción se reduce considerablemente respecto de aquellos *applets* que emplean una única representación. Destaca también el hecho de que la presencia de *applets* que posibilitan efectuar dos acciones es similar en ambos casos, si bien aumenta considerablemente la frecuencia con la que los *applets* permiten realizar tres acciones.

FIGURA 14. Sistemas de representación y número de acciones



Discusión

Como ya hemos visto en el marco teórico, en el estudio de las imágenes conceptuales que los estudiantes construyen sobre la noción de límite de una función, Przenioslo (2004) considera que aquellas centradas en las ideas de “entorno” y de “valores que se aproximan” son *eficientes*, mientras que el resto eran consideradas *ineficientes*. Entre las imágenes conceptuales eficientes, se observa que los *applets* analizados promueven ampliamente la imagen conceptual de “valores que se aproximan”, pero la centrada en la idea de “entorno” es la menos fomentada. Por otro lado, entre las imágenes conceptuales ineficientes, las de “gráfica que se aproxima” y “aproximación algorítmica esquemática” son ampliamente promovidas. Además, las imágenes asociadas a las ideas de “estar definida en el punto” y “el límite en el punto coincide con la función en el punto” también son promovidas, aunque en menor medida. A la hora de desarrollar las diferentes imágenes conceptuales de la noción de límite, se ha observado que la mayor parte de los *applets* eran interactivos, frente a los no interactivos, donde las imágenes conceptuales aparecían con menos frecuencia (a excepción de la imagen centrada en la idea de “aproximación algorítmica esquemática”, donde la tendencia se invertía). Por lo tanto, como cabía esperar, la interactividad parece ser una buena elección a la hora de desarrollar dichas imágenes conceptuales eficientes.

Socas (2007) resalta la necesidad de diseñar actividades que proporcionen los cuatro tipos de acciones al utilizar distintas representaciones (reconocimiento, transformaciones internas, transformaciones externas y coordinación). Sin embargo, no se ha encontrado ningún *applet* que proporcione transformaciones externas, en consonancia con el resultado obtenido por Ward *et al.* (2013), donde se afirma que este tipo de acciones son las que más dificultades generan a los docentes. Aunque este tipo de acción sería deseable, su desarrollo

puede ser complicado a través de *applets* de GeoGebra. Cabe destacar que la interactividad de los *applets* favorece el desarrollo de las acciones de transformación interna dentro de un mismo sistema de representación y de coordinación entre diferentes sistemas de representación. Además, favorece la aparición de dos y hasta tres acciones de manera simultánea en el mismo *applet*. Mientras que en los *applets* no interactivos estas acciones disminuyen drásticamente o ni siquiera llegan a aparecer.

Por otro lado, a medida que aumenta la cantidad de sistemas de representación del límite empleados, el porcentaje de *applets* en los que se realizan transformaciones internas en un sistema de representación y en los que se coordinan distintos sistemas de representación también aumenta. A su vez, el porcentaje de *applets* que permiten hacer dos y tres acciones también crece, a diferencia del de los *applets* que tan solo permiten realizar una única acción. Esto parece indicar la existencia de una correlación entre la cantidad de representaciones del límite utilizadas en los *applets* y el porcentaje de *applets* que permiten realizar dos o tres acciones entre los sistemas de representación valorados. Por último, considerando que Pecharromás (2013) afirma que la realización de estas acciones en el contexto de un objeto matemático concreto caracteriza en cierto modo la actividad matemática y su presencia es un indicador de idoneidad epistémica, las conclusiones obtenidas confirman lo expuesto por Blázquez y Ortega (2001), cuando afirmaron que “la utilización de distintos registros [...] mejora la comprensión del concepto de límite”.

La capacidad de coordinar distintos registros por el estudiante se ve dificultada por el hecho de que el *software* media ese proceso. Los *applets*, en muchos casos, requieren de un discurso docente que no está presente en los mismos, de manera que a la hora de utilizarlos en la práctica docente es preciso considerar la idoneidad ecológica presentada por Godino *et al.* (2007). En cualquier caso, el aumento en el

número de representaciones del límite utilizadas favorece la acción de coordinación en los *applets* analizados (ver figura 13).

Según Godino *et al.* (2019, p. 42), la didáctica “debe abordar cuestiones [...] también prescriptivas y valorativas, propias del conocimiento tecnológico [...] debe proporcionar resultados que permitan la acción efectiva sobre una parcela de la realidad: la enseñanza y aprendizaje de la matemática”. En este sentido, la literatura existente tiene claras implicaciones prescriptivas sobre las cualidades que debería tener un *applet* destinado a la enseñanza del límite de una función. En concreto, se deberían fomentar a través de la interactividad imágenes conceptuales eficientes en un contexto en que se realicen todo tipo de acciones sobre la mayor variedad posible de sistemas de representación. Nuestros resultados parecen indicar que estos cuatro elementos (interactividad, eficiencia de la imagen conceptual, riqueza de sistemas de representación y acciones) van de la mano. Sin embargo, desde un punto de vista valorativo, hemos constatado en la muestra analizada una riqueza relativamente baja de sistemas de representación y de acciones (incluso la ausencia de transformaciones externas) y la presencia comparativamente alta de imágenes conceptuales ineficientes. Estos aspectos implican que los docentes deban ser críticos a la hora de seleccionar recursos *online* ajenos, así como ser cuidadosos en el diseño de los propios.

Finalmente, en este trabajo nos hemos centrado solo en algunos de los objetos primarios que, según el EOS, permiten describir la actividad matemática. En particular, nos hemos centrado en el lenguaje (a través de los sistemas de representación), en los conceptos (a través de las imágenes conceptuales) y en cierto modo en los procedimientos (a través de las acciones realizadas dentro de los sistemas de representación). Pensamos que puede ser interesante ampliar el análisis a los restantes objetos primarios, desarrollando un instrumento de análisis más completo que nos permita no solo clasificar los *applets* desde el punto de vista de su idoneidad, sino también realizar actividades de formación basadas en dicho instrumento (Burgos *et al.*, 2020).

Agradecimientos

Los autores desean agradecer a los revisores por habernos sugerido algunas referencias y por los comentarios que han contribuido a la mejora de este trabajo.

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el grupo de investigación Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales (DIMACE) de UNIR.

El tercer autor ha sido financiado por el grupo Investigación en Educación Matemática (Grupo S60_20R) del Gobierno de Aragón.

Nota

¹ <https://www.geogebra.org/materials>

Referencias bibliográficas

- Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Burgos, M. (2018). Online educational videos according to specific didactics: the case of mathematics / Los vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas. *Culture and Education*, 30(4), 633-662. <https://doi.org/10.1080/11356405.2018.1524651>

- Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), 219-236.
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria. *Revista Española de Pedagogía*, 78(275), 27-49. <https://doi.org/10.22550/REP78-1-2020-07>
- Caligaris, M. G., Schivo, M. E. y Romiti, M. R. (2015). Calculus & GeoGebra, an interesting partnership. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 174, 1183-1188. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2015.01.735>
- Cid, A. I., Guede, R. y Tolmos, P. (2018). La clase invertida en la formación inicial del profesorado: acercando la realidad del aula de matemáticas. *Bordón, Revista de Pedagogía*, 70(3), 77-93.
- Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2007). Fenómenos que organizan el límite. *PNA*, 1(3), 125-137.
- Contreras, Á. y García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(3), 277-310.
- Cornu, B. (2002). Limits. En D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10
- Creswell, J. W. (2002). *Educational research: planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Pearson.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Flick, U. (2004). Triangulation in qualitative research. En U. Flick, E. Von Kardoff e I. Steinke (eds.), *A companion to qualitative research* (pp. 178-183). SAGE. <https://doi.org/10.4135/9781849209441.n7>
- García, R., Rebollo-Catalán, A. y García, C. (2016). Relación entre las preferencias de formación del profesorado y su competencia digital en las redes sociales. *Bordón, Revista de Pedagogía*, 68(2), 137-153. <https://doi.org/10.13042/Bordon.2016.68209>
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, 39(1), 38-43. <https://www.jstor.org/stable/26742011>
- Godino, J. D., Rivas, H. y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Práxis Educativa*, 7(2), 331-354.
- Hohenwarter, J., Hohenwarter, M. y Lavicza, Z. (2009). Introducing dynamic mathematics software to secondary school teachers: the case of GeoGebra. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 28(2), 135-146.
- Hohenwarter, M. y Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: towards an International GeoGebra Institute. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 27(3), 49-54.
- Hutkemri, E. Z. (2014). Impact of using GeoGebra on students' conceptual and procedural knowledge of limit function. *Mediterranean Journal of Social Sciences*, 5(23), 873-881. <https://doi.org/10.5901/mjss.2014.v5n23p873>
- Leavy, P. (2017). *Research design: quantitative, qualitative, mixed methods, arts-based, and community-based participatory research approaches*. The Guilford Press.

- Onwuegbuzie, A. J. y Leech, N. L. (2007). Validity and qualitative research: an oxymoron? *Quality & Quantity*, 41(2), 233-249. <https://doi.org/10.1007/s11135-006-9000-3>
- Palomino, J., Hurtado, J. y Barrios, E. (2009). Dificultades en los procesos de enseñanza aprendizaje del concepto de límite y su relación con los sistemas de representación. En *VI Encuentro Internacional de Matemáticas - EIMAT 2009* (pp. 187-208). Universidad del Atlántico.
- Pecharromás, C. (2013). Naturaleza de los objetos matemáticos: representación y significado. *Enseñanza de las Ciencias*, 31(3), 121-134. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n3.931>
- Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics*, 55, 103-132. <https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000017667.70982.05>
- Roussou, M., Oliver, M. y Slater, M. (2006). The virtual playground: an educational virtual reality environment for evaluating interactivity and conceptual learning. *Virtual Reality*, 10(3-4), 227-240. <https://doi.org/10.1007/s10055-006-0035-5>
- Sánchez-Compañá, T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada] Repositorio Institucional UG. <http://hdl.handle.net/10481/23782>
- Sari, P. (2017). GeoGebra as a means for understanding limit concepts. *Southeast Asian Mathematics Education Journal*, 7(2), 71-84. <https://doi.org/10.46517/seamej.v7i2.55>
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (eds.), *Investigación en educación matemática XI* (pp. 19-52). SEIEM.
- Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169. <https://doi.org/10.1007/BF00305619>
- Turney, C. S. M., Robinson, D., Lee, M. y Soutar, A. (2009). Using technology to direct learning in higher education. The way forward? *Active Learning in Higher Education*, 10(1), 71-83. <https://doi.org/10.1177/1469787408100196>
- Ward, E., Inzunza, S., Hernández, S. y López, F. (2013). Conceptualización y uso de representaciones sobre el concepto de límite en docentes de bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (eds.), *Investigación en educación matemática XVII* (pp. 523-534). SEIEM.
- Williams, S. R. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(3), 219-236. <https://doi.org/10.2307/749075>

Abstract

Analysis of GeoGebra applets for teaching the limit of a function

INTRODUCTION. The importance of GeoGebra as one of the main tools that offer Mathematics teachers the possibility of working with virtual simulations in their classrooms is indisputable. However, the resources in the official GeoGebra repository do not go through any review process. Therefore, the teacher's criteria when selecting this type of resource is key for teaching success. Thus, it is necessary to provide teachers with tools to analyze GeoGebra applets for their implementation in the classroom. In particular, this type of resources offers numerous advantages to teach the mathematical concept of the limit of a function. **METHOD.** In this paper, the didactic suitability of GeoGebra applets for teaching the limit of a function is analyzed. An exploratory and descriptive study has been carried out. The analysis has been carried out

using a deductive approach based on five different variables (type of limit, interactivity, conceptual image, representation and action). The analyzed sample, chosen through purposeful sampling, is 150 applets from the official GeoGebra material repository. **RESULTS.** The results are shown after analyzing the five established variables for each of the studied applets. The influence of interactivity with the rest of the variables is also analyzed, as well as the influence of the number of representations of the limit in the applets. **DISCUSSION.** In the analysis carried out of the didactic suitability, the importance of the interactivity variable stands out, as it enhances the development of most of the conceptual images of the limit. The use of a greater number of limit representation systems in an applet is also positive, since it favors the development of various actions in said representation systems.

Keywords: *Onto-semiotic approach, Mathematics education, Technology uses in education, Educational resources.*

Résumé

Analyse des applets GeoGebra pour l'enseignement de la limite d'une fonction

INTRODUCTION. L'importance de GeoGebra comme l'un des principaux outils offrant aux professeurs de mathématiques la possibilité de travailler avec des simulations virtuelles dans leurs classes est indiscutable. Cependant, les ressources du dépôt officiel de GeoGebra ne sont pas soumises à aucun processus de révision. Par conséquent, les critères de l'enseignant lors de la sélection de ce type de ressource sont essentiels. Des outils sont nécessaires pour analyser les applets GeoGebra en vue de leur mise en œuvre. En particulier, par rapport à d'autres types d'outils, ce type de ressource offre de nombreux avantages pour l'enseignement du concept mathématique de la limite d'une fonction. **MÉTHODE.** Cet article analyse l'adéquation didactique des applets GeoGebra pour l'enseignement de la limite d'une fonction. Une étude exploratoire et descriptive a été réalisée. L'analyse a été effectuée en utilisant une approche déductive basée sur cinq variables différentes (type de limite, interactivité, image conceptuelle, représentation et action). L'échantillon analysé, choisi au moyen d'un échantillonnage raisonné, est constitué de 150 applets provenant du dépôt officiel de GeoGebra. **RÉSULTATS.** Les résultats sont présentés après l'analyse des cinq variables établies pour chacune des applets étudiées. Nous analysons également l'influence de l'interactivité avec le reste des variables, ainsi que l'influence du nombre de représentations de la limite dans les applets. **DISCUSSION.** Dans l'analyse de l'adéquation didactique effectuée, l'importance de la variable interactivité ressort car elle favorise le développement de la plupart des images conceptuelles de la limite. L'utilisation d'un plus grand nombre de systèmes de représentation de la limite dans une applet est également positive car elle favorise le développement de plusieurs actions dans ces systèmes de représentation.

Mots-clés : *Approche onto-sémiotique, Enseignement des mathématiques, Usage de la technologie dans l'enseignement, Ressources pédagogiques.*

Perfil profesional de los autores

Álvaro Barreras Peral (autor de contacto)

Doctor en Matemáticas. Profesor de Matemáticas (Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, 2014-2016). Profesor de Didáctica Matemáticas (UNIR, 2016-actualidad). Director académico de dos másteres en Didáctica de las Matemáticas en UNIR. Investigador principal del grupo de investigación de UNIR Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales.

Código ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5325-8505>

Correo electrónico de contacto: alvaro.barreras@unir.net

Dirección para la correspondencia: Universidad Internacional de La Rioja. Av. de la Paz, 137, 26006 Logroño (La Rioja).

Luis Dubarbie

Licenciado y doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Cantabria. Actualmente es profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad Internacional de La Rioja (UNIR). Miembro del grupo de investigación Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de UNIR. Publicaciones en el ámbito de las matemáticas y de la didáctica de las matemáticas.

Código ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9133-1128>

Correo electrónico de contacto: luis.dubarbie@unir.net

Antonio Oller

Licenciado en Ciencias Matemáticas (2004) por la Universidad de Zaragoza y doctor por la Universidad de Valladolid (2012) con una tesis sobre la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en educación secundaria. Actualmente es profesor del Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza. Ha publicado numerosos trabajos de investigación sobre matemática pura, historia y educación matemática publicados en el ámbito nacional e internacional. Es IP del grupo de referencia Investigación en Educación Matemática (S60_20R) del Gobierno de Aragón.

Código ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8191-3199>

Correo electrónico de contacto: oller@unizar.es

