

BORDÓN

Revista de Pedagogía



Volumen 65
Número 3
2013

SOCIEDAD ESPAÑOLA DE PEDAGOGÍA

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS DESDE UNA METODOLOGÍA TECNOLÓGICA E INNOVADORA

Solving arithmetic problems using an innovative technological methodology

MANUEL LUCAS LEDESMA
VIDAL ALONSO SECADES

Universidad Pontificia de Salamanca

INTRODUCCIÓN. Este artículo resume los aspectos relevantes de una investigación sobre la clasificación de los problemas aritméticos según su estructura semántica y cómo puede abordarse su didáctica desde una metodología innovadora basada en el la utilización de las tecnologías del aprendizaje y la comunicación. **MÉTODO.** Se desarrolla un software educativo innovador denominado RPA que presenta una secuencia didáctica en función de la dificultad de los mismos. Dicho software está accesible en <http://mimosa.pntic.mec.es/mlucas2/rpa> . La investigación se lleva a cabo aplicando el software RPA en la práctica docente de siete centros educativos, de cuatro provincias de la Comunidad de Castilla y León (40 profesores y 483 alumnos/as), mediante un Proyecto de Innovación Educativa financiado en su totalidad por la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. Se utiliza un diseño simple de medidas repetidas donde el tratamiento A es la aplicación metodológica del libro de texto y el tratamiento B es la metodología basada en el software “RPA”. **RESULTADOS.** Se concluye que la clasificación inicial propuesta en el software “RPA” de resolución de problemas aritméticos según su estructura semántica, no es coincidente con el grado de dificultad mostrado por el alumnado participante en la investigación. Siendo así, se propone una nueva clasificación de problemas aritméticos según su estructura semántica en función de la dificultad que presentan para el alumnado de Educación Primaria. Por otra parte, el 71,1% del alumnado participante mejoró sus resultados después del tratamiento con metodología basada en el software RPA. **DISCUSIÓN.** Como limitaciones en la investigación cabe destacar las posibles interacciones entre tratamientos. Las futuras líneas de investigación apuntan a la realización de nuevas investigaciones con muestra probabilística y grupo de control, junto con el efecto del software RPA en el campo de las personas mayores como actividad preventiva ante las enfermedades neurodegenerativas.

Palabras clave: *Educación Básica, Pedagogía, Teoría y Métodos Educativos, Enseñanza Programada.*

Introducción

Desde la primera normativa legislativa española en educación, con la Ley de Instrucción Pública sancionada el 9 de septiembre de 1857, más conocida como Ley Moyano, se han recogido con especial interés la aritmética y su aplicación a la resolución de problemas aritméticos cotidianos.

Conceptualmente el problema aritmético plantea situaciones que presentan dificultades sin una solución inmediata. En este sentido, Krulik y Rudnick (1987) señalan que un problema es una situación, cuantitativa o no, que pide una solución para la cual los individuos implicados no conocen medios o caminos evidentes para obtenerla.

En la LOE (2006), dentro de la competencia matemática, se hace referencia entre otros aspectos a la habilidad para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. Supone, por tanto, la conexión entre la abstracción matemática y lo cotidiano en la vida del individuo.

La resolución de problemas aritméticos, por tanto, es uno de los contenidos transversales dentro del área matemática. Además, cabe destacar, que supone una tarea habitual y cotidiana que los alumnos realizan en su vida. Es por ello tan importante que el alumnado tenga acceso a estrategias de aprendizaje que le permita la resolución de situaciones comunes.

La resolución activa de problemas es considerada como el método más conveniente de aprender matemáticas, y un medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos (Cantero Caja *et al.*, 2004: 9).

Compartimos con Lester (1994) que la resolución de problemas es el tema que más dificultades genera debido a la falta de un puente que una la investigación y la práctica, de forma que los resultados puedan trasladarse mediante

aplicaciones curriculares específicas a las aulas produciendo un avance significativo tanto en los aspectos didácticos como motivacionales del alumnado.

En 1999, Luceño Campos apuntaba que la sociedad actual tiene necesidad de individuos capaces de formular problemas derivados de las situaciones con que se encuentran y de resolverlos hábilmente. Personas que piensen de una forma flexible, crítica, eficaz y creativa. Igualmente señala que surgen nuevas posibilidades que el desarrollo de la tecnología va a aportar a los modos de hacer y aprender matemática, elemento fundamental que utilizaremos para llevar a cabo nuestra investigación.

Aguilar Villagrán y Navarro Guzmán (2000) señalan que el desarrollo de estrategias de resolución de problemas aritméticos en el alumnado de Educación Primaria favorece la motivación hacia la matemática y crea habilidades metacognitivas que pueden generalizarse más allá de los aspectos curriculares.

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos estableció en su "Agenda for Action", que la resolución de problemas debe ser el centro de interés de las matemáticas escolares (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM, 2004).

Castro Martínez (2008) indica la importancia del uso de las herramientas informáticas en los procesos de enseñanza-aprendizaje por el fuerte potencial representacional tanto gráfico como simbólico, y debido a que añaden nuevas posibilidades de manipulación de las representaciones que no era posible realizar sin ellas. En nuestra investigación utilizamos una aplicación informática creada específicamente para el trabajo de aula en resolución de problemas aritméticos clasificados según se estructura semántica, la cual incluye elementos multimedia que van a permitir la manipulación virtual de datos con el fin de facilitar los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Las editoriales de libros de texto tratan de forma desigual las diferentes tipologías de problemas aritméticos según su estructura semántica (Cantero Caja *et al.*, 2004; Orrantía Rodríguez, González y Vicente Martín, 2005).

La principal área evaluada en el Informe PISA 2003 fue la resolución de problemas, definiendo la competencia matemática en los siguientes términos:

“La competencia matemática es la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en las matemáticas en función de las necesidades de su vida como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo” (OCDE y Ministerio de Educación España, 2005: 5).

El desarrollo de la investigación se realiza durante dos cursos escolares dentro de sendos proyectos oficiales financiados en su totalidad por la Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León:

- Curso 2009-2010: Proyecto de Licencia de Estudios destinado a desarrollar la aplicación informática sobre Resolución de Problemas Aritméticos “RPA” (Lucas Ledesma, 2010a)
- Curso 2010-2011: Proyecto de Innovación Educativa, con la participación de siete centros educativos en Castilla y León sostenidos con fondos públicos (Burgos, León, Palencia y Valladolid).

Objetivos de la investigación

Elaborar un programa informático, que desarrolle la competencia matemática a través de la Resolución de Problemas Aritméticos en función de su estructura semántica abarcando todas sus tipologías de forma secuenciada según su dificultad.

Analizar posibles modificaciones en la competencia matemática del alumnado en resolución de problemas a partir del trabajo con la aplicación informática específica.

Proponer una nueva secuencia de tipologías de Problemas Aritméticos según su estructura semántica en función de su dificultad, a partir de los resultados obtenidos en la investigación en caso de diferir de la propuesta inicial incluida en el programa informático.

Diseño y programación de la aplicación informática

Características de la aplicación

El programa Resolución de Problemas Aritméticos (RPA) es una aplicación informática multimedia, interactiva, multiplataforma, disponible a través de cualquier navegador web estándar, que incluye una versión accesible para personas con discapacidad visual.

La aplicación RPA ha sido desarrollada con Adobe ActionScript, lenguaje de programación de la Plataforma Adobe Flash. Destaca por la importancia que tiene en el desarrollo de los aspectos interactivos y la compatibilidad con la gran mayoría de navegadores web y sistemas operativos.

El uso de las Tecnologías de la Información Aprendizaje y Comunicación, es un elemento motivador que facilita el acercamiento de nuestros alumnos/as a las matemáticas, por ello se ha prestado un especial empeño en lograr una óptima experiencia en el uso del software, procurando una curva de aprendizaje suave sobre su manejo.

El programa RPA es una aplicación de manejo sencillo e intuitivo dado que los usuarios del mismo son alumnos de Educación Primaria. Por ello, se ha tratado de diseñar una interfaz gráfica amigable bajo esas premisas. En la figura 1 observamos el aspecto del menú del programa RPA.

FIGURA 1. Aspecto del menú del programa “RPA”



Herramienta específica de cálculo mental

Una de las aplicaciones importantes que aporta el programa RPA al trabajo de aula con el alumnado es el cálculo mental, ya que pueden obviarse los cálculos manuscritos y hacer propuestas al alumnado, en el sentido de contestar lo antes posible, o resolver el mayor número de problemas en un tiempo reducido.

Genera el Informe de Evaluación

El software RPA evalúa cada problema en el momento en que el alumno introduce el resultado, así se recibe un feedback o retroalimentación instantánea sobre el acierto o error de la solución que han propuesto.

Todas las respuestas (aciertos y errores) que hayan introducido los alumnos/as quedan

FIGURA 2. Aspecto del Informe de Evaluación



reflejadas en la opción "INFORME" del menú. De esta forma podemos conocer exactamente en qué niveles y con qué resultados han trabajado los alumnos/as en cada sesión de trabajo.

Por tanto, el programa RPA es un instrumento diagnóstico preciso sobre el nivel curricular del alumnado respecto de la resolución de problemas aritméticos. Siguiendo a Jiménez Vivas (2003) convenimos que los profesionales de la educación comparten la idea de la importancia del diagnóstico como elemento esencial del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Es importante destacar que en la metodología con libro de texto, una vez que el alumno responde al problema, habitualmente transcurre demasiado espacio de tiempo hasta que sucede el feedback por parte del profesor. Las causas son diversas, fundamentalmente debido a la espera necesaria para que terminen otros alumnos, porque termina la sesión... Desde la metodología de trabajo con el software RPA, el tiempo de respuesta es instantáneo. En la figura 2 observamos el aspecto del informe de evaluación que genera el programa con cada sesión de usuario.

Genera itinerarios formativos personalizados

El software RPA incluye procesos en su programación para definir itinerarios formativos personalizados para cada alumno, de forma que el aprendizaje se adapte a cada situación individual.

En primer lugar, el software permite configurar el número de problemas que han de resolver correctamente los alumnos/as para progresar al nivel siguiente de mayor dificultad. Se recomienda que el número de aciertos definido en el itinerario formativo sea bajo para evitar posibles automatismos en la respuesta.

La organización por niveles de dificultad utilizada en la aplicación para resolver los problemas

aritméticos permite aproximar la edad cronológica del alumnado con cada tipo de problema, evitando así desfases didácticos por motivos cronológicos. El nivel inicial se encuentra hacia los seis años y el proceso final podría considerarse hacia 6º curso de Educación Primaria.

Otro aspecto importante de la personalización que ofrece el software RPA, radica en que cada alumno puede trabajar en los niveles que no domina teniendo acceso a todos ellos y avanzar o detenerse, según su ritmo de aprendizaje, lo cual no puede suceder en la metodología con libro de texto, en la que todos los alumnos tienen que realizar los ejercicios al ritmo que marcan los temas del libro, sin poder avanzar o detenerse en ellos.

Ayuda gráfica interactiva

Carrasumada Serrano y Silvestre Benach (1996: 69), afirman que la presencia de objetos concretos o dibujos facilitan el proceso de representación, dando lugar a una mejora en el nivel resolutor.

En el programa RPA se ha introducido una herramienta de ayuda gráfica interactiva (a partir de ahora, AGI) de manipulación de cantidades, que representa con barras, de forma proporcional, los datos del problema permitiendo su manipulación y facilitando visualmente su comprensión, ayudando así, a la adquisición de competencias en la resolución de problemas aritméticos.

La funcionalidad de la AGI consiste en:

- Representar mediante rectángulos de colores a modo de regletas, el dato 1, el dato 2 y la respuesta, a escala proporcional. De tal forma que permite visualizar la relación de tamaño entre los rectángulos que representan las cantidades de forma real.
- Interactividad al presionar con el puntero del ratón sobre cada rectángulo, ya

que muestra el valor del dato o la palabra “Respuesta” para ayudar a identificar cada una de los rectángulos con su valor.

- Interactividad al estar habilitada la técnica denominada “Arrastrar y soltar” (Drag and Drop) que es la acción de mover con el ratón objetos en la pantalla. Realmente, aquí es donde el alumno puede experimentar manipulando digitalmente los rectángulos que representan las cantidades con su ratón. Visualmente puede comprobar si el planteamiento de resolución del problema es correcto, o puede manipular los rectángulos hasta encontrar el planteamiento de resolución adecuado.

Finalmente, la AGI facilita el Intercambio de planteamientos didácticos entre profesor-alumno y alumno-alumno en el momento de plantear sus hipótesis, ya que ofrece una representación proporcional de cantidades de forma exacta.

Secuenciación de los problemas aritméticos en el Programa RPA

En la tabla 1 puede verse la secuencia evolutiva en la capacidad de resolución de problemas aritméticos según su estructura semántica realizada a partir de la secuenciación de problemas aritméticos presentada por Cantero Caja *et al.* (2004: 13)

TABLA 1. Secuenciación de niveles de problemas aritméticos en el programa “RPA”

Nivel	Desde	Categoría	Tipo
A 1	6 años	Suma y resta. Cambio	CA1
A 2	6 años	Suma y resta. Cambio	CA2
A 3	6 años	Suma y resta. Combinación	CO1
A 4	6 años	Suma y resta. Comparación	CM2
B 5	7 años	Suma y resta. Cambio	CA3
B 6	7 años	Suma y resta. Cambio	CA4
B 7	7 años	Suma y resta. Comparación	CM4
B 8	7 años	Multiplic. y división. Multiplicación-Razón	MR1
B 9	7 años	Multiplic. y división. Multiplicación-Razón	MR2
B 10	7 años	Multiplic. y división. Multiplicación-Razón	MR3
B 11	7 años	Multiplicación y división. División-Razón	DPR
C 12	8 años	Suma y resta. Cambio	CA5
C 13	8 años	Suma y resta. Cambio	CA6
C 14	8 años	Suma y resta. Combinación	CO2
C 15	8 años	Suma y resta. Comparación	CM1
C 16	8 años	Suma y resta. Comparación	CM3
C 17	8 años	Suma y resta. Comparación	CM5
C 18	8 años	Suma y resta. Comparación	CM6
C 19	8 años	Multiplicación y división. División-Razón	DCR
D 20	9 años	Suma y resta. Igualación	IG1
D 21	9 años	Suma y resta. Igualación	IG2

TABLA 1. Secuenciación de niveles de problemas aritméticos en el programa “RPA” (cont.)

Nivel	Desde	Categoría	Tipo
D 22	9 años	Suma y resta. Igualación	IG3
D 23	9 años	Suma y resta. Igualación	IG4
D 24	9 años	Suma y resta. Igualación	IG5
D 25	9 años	Suma y resta. Igualación	IG6
D 26	9 años	X y /. Multiplicación – comparación en más	MCM en +
D 27	9 años	X y /. División partición comparación en más	DPCM en +
D 28	9 años	X y /. División cuotición comparación en más	DCCM en +
E 29	10 años	X y /. Multiplicación – comparación en menos	MCM en -
E 30	10 años	X y /. División partición en menos	DPCM en -
E 31	10 años	X y /. División cuotición en menos	DCCM en -
E 32	10 años	X y /. Multiplicación fórmula	MF
E 33	10 años	X y /. División partición fórmula	DPF
E 34	10 años	X y /. División cuotición fórmula	DCF
E 35	10 años	X y /. Multipl-combinac. o producto cartesiano	MCO PCI
E 36	10 años	X y /. Divis.-combinac. o producto cartesiano	DCO PC2

Nota: elaboración propia a partir de Cantero Caja et al. (2004: 13).

Se ha utilizado una letra para cada grupo de edad por cursos (A=6 años, B=7 años, C=8 años, D=9 años y E=10 años) y se ha secuenciado cada tipo de problema del más sencillo al más complejo en 36 niveles (N1, N2, N3,..., N36). Esta nomenclatura ha sido utilizada en

los cuadernillos de papel para realizar las pruebas escritas inicial y final.

En la figura 3 se muestra la pantalla de actividades donde el alumnado puede seleccionar cada uno de los treinta y seis tipos de problemas posibles.

FIGURA 3. Menú actividades: niveles de problemas aritméticos



Comparativa metodológica entre el programa RPA y el libro de texto

Los enunciados de los problemas aritméticos se generan de forma aleatoria para cada una de las categorías o niveles. En la figura 4 se muestra un problema del nivel 20 (Igualación IG1).

En lo referente a los datos del problema, igualmente son generados de forma aleatoria entre rangos apropiados a las posibilidades de cálculo de los alumnos. Se utilizan:

- Números naturales $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- En los problemas donde se emplea para su resolución el algoritmo de la división, todas las divisiones son exactas.
- Utilización de números pequeños, ya que siguiendo a Aguilar y Martínez (1998: 78), constatan que los alumnos resuelven mejor un problema si se les ofrece con números pequeños que si se les muestran con números grandes.

En la metodología basada en el libro de texto, el alumnado realiza un número bajo de problemas en un tiempo extenso debido los procesos de escritura de los enunciados, sobre todo en el ciclo 2º y 3º.

En la metodología de trabajo con el software RPA, se realizan un elevado número de problemas en un tiempo reducido debido a que los alumnos se centran únicamente en la tarea de resolución del problema que aparece en pantalla, buscan una solución y comprueban el resultado para inmediatamente pasar al siguiente o elaborar una nueva solución. Con el fin de evitar la fatiga por el elevado número de problemas que pueden resolver los alumnos en un tiempo reducido, se recomienda que cada sesión de trabajo no supere los treinta minutos.

Metodología y diseño de la investigación

El Proyecto de Innovación Educativa arranca en el curso 2010-2011, con la invitación vía correo electrónico a más de 500 centros de enseñanzas no universitarias de Castilla y León sostenidos con fondos públicos. Una vez aprobada la participación por parte de los respectivos consejos escolares, se inscriben siete centros educativos de Educación Primaria con 483 alumnos en total y 40 profesores.

El desarrollo del proyecto se lleva a cabo a través de una plataforma virtual de e-learning

FIGURA 4. Aspecto de un problema del nivel 20 (IG1)

ACTIVIDADES: Nivel 20. (+9a) INICIO MENÚ INFORME

Resueltos: 0 Problema Nº: 1 Representación Gráfica Interactiva de Datos

Luis tiene 52 peces. Laura tiene 32 peces.
¿ Cuántos peces debe comprar Laura para tener tantos como Luis ?

Respuesta: peces.

Comprobar respuesta Cambiar de Problema Cambiar de Nivel

Puedes mover los gráficos

Nombre: Manuel Lucas Ledesma Total Prob. Resueltos : 0 Tipo: Suma y resta. Igualación. IG1

desde donde ha sido realizada la coordinación de todos los elementos del proyecto. Las herramientas de comunicación social que ofrece como foros, chat y mensajería, permiten el intercambio de experiencias y reflexiones docentes sobre el proyecto.

El proyecto se divide en las siguientes fases que son mostradas a los cuarenta docentes participantes en el proyecto a través de la plataforma:

- Fase 0: el alumnado trabaja la resolución de problemas aritméticos con los libros de texto de forma ordinaria. De septiembre a diciembre.
- Fase 1: los alumnos/as realizan un primer cuadernillo (C1) de problemas aritméticos para conocer su competencia en la resolución mediante el trabajo con libro de texto. Durante diciembre y enero.
- Fase 2: el profesorado tiene acceso a un vídeo tutorial del software Resolución de Problemas Aritméticos Lucas Ledesma (2010b), y al propio programa informático RPA que abarca todas las tipologías de problemas aritméticos. El alumnado trabaja con el programa desde enero a mayo. Se cumplimenta una ficha con las sesiones de trabajo, el tiempo y los niveles de problemas trabajados.
- Fase 3: al finalizar el curso (meses de mayo y junio), el alumnado realiza un segundo cuadernillo de problemas aritméticos para comprobar la mejora o no en su competencia de resolución de problemas aritméticos.

Hipótesis:

- Hipótesis alterna (H_a). El nivel de resolución de problemas aritméticos del alumnado de Educación Primaria es menor al inicio de la investigación que a su finalización.
- Hipótesis nula (H_0). No habrá diferencia en el nivel de resolución de problemas aritméticos del alumnado de Educación

Primaria entre el principio de la investigación y el final de la misma.

Se desea comprobar la hipótesis con un margen de error $<5\%$.

Nivel de significación: para todo valor de probabilidad igual o menor que 0.05, se acepta H_a y se rechaza H_0 .

Zona de rechazo: para todo valor de probabilidad mayor que 0.05, se acepta H_0 y se rechaza H_a .

Diseño de la investigación

Se utilizará un diseño *Cuasi Experimental Intragrupo* (Diseño Simple de Medidas Repetidas), con una muestra de la población escolar no probabilística, sin asignación al azar pues los alumnos están designados de antemano en sus aulas por decisiones administrativas.

La elección de este tipo de diseño está determinada por la necesidad de respetar las agrupaciones escolares, no existiendo la posibilidad de utilizar aleatorización para formar grupos. En la tabla 2 se muestra el diseño de la investigación.

TABLA 2. Diseño de la investigación

Diseño simple de medidas repetidas				
Asignación	Tratamiento	Test	Tratamiento	Retest
No al azar	A	C1	B	C2

Los profesores actúan con el mismo grupo de alumnos trabajando sucesivamente con dos procedimientos diferentes, se trata de un diseño con un solo grupo.

Diseño del tratamiento

Tenemos dos tratamientos que son las variables independientes A y B:

- Tratamiento A, se trabajan los problemas aritméticos en el aula con los libros de texto escolares durante el primer cuatrimestre del curso académico.
- Tratamiento B, se trabajan los problemas aritméticos con el software RPA durante el segundo cuatrimestre. El software RPA es utilizado de forma periódica por los alumnos de 1º a 6º de Educación Primaria que participan en el proyecto (se recomienda 60 minutos por semana y aula).

La variable dependiente es el rendimiento del alumnado en la Resolución de Problemas Aritméticos: número de niveles resueltos correctamente (36 tipologías).

En la tabla 3 observamos el cronograma del diseño de la investigación.

TABLA 3. Cronograma del diseño de la investigación 2010-2011

A	C1			B			C2		
	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	Ene.	Feb.		Mar.	Abr.

Los Test-Retest (T1 y T2) corresponden a la realización de los cuadernillos C1 y C2, respectivamente, que han sido elaborados con el software RPA. Se realizan mediante prueba escrita. A los alumnos no se les informa de que participan en una investigación y conocen que la calificación final en problemas aritméticos es la media aritmética de las calificaciones obtenidos en ambos cuadernillos.

Instrumentos de recogida de información

- Cuadernillo 1 y 2 (C1, C2). Se realiza un cuadernillo de problemas aritméticos al principio de la investigación y otro al final. Ambos han sido generados con el software RPA. De los cuadernillos de problemas

se han obtenido los datos del grado de aprendizaje del alumnado al comienzo y finalización del proyecto (36 problemas x 463 (de 483) alumnos x 2 fases = 33.336 problemas aritméticos en total). Incluyen:

- Instrucciones de aplicación de la prueba.
- Plantilla de evaluación para el registro de los resultados de los problemas.
- Plantilla de soluciones a los problemas propuestos en el cuadernillo.

- Ficha de registro: profesor y alumno.
- Escala Likert de actitud hacia la investigación: profesores. Se realiza una prueba piloto con 16 docentes de 60 ítems y se seleccionan los 24 mejores ítem para la escala definitiva. El análisis de consistencia interna realizado mediante el estadístico de fiabilidad Alfa de Cronbach ofrece un valor de 0,946. Por lo tanto, la escala es fiable (Índice de Fiabilidad, 95%). La validez de constructo arroja un valor del 54%.
- Escala Likert de actitud hacia la investigación: alumnado ciclo 3º. Se realiza una prueba piloto con 18 alumnos/as de 32 ítems y se seleccionan los 20 mejores ítem para la escala definitiva. El análisis de consistencia interna mediante el estadístico de fiabilidad Alfa de Cronbach ofrece un valor de 0,871. Por lo tanto, la escala es fiable (Índice de Fiabilidad, 87%). No podemos certificar su validez por ser el porcentaje de la varianza del 36%.
- Focus Group: alumnos. La hipótesis de trabajo es la siguiente: “Los alumnos/as prefieren trabajar en la resolución de problemas aritméticos desde la propuesta metodológica de la investigación antes que en el libro de texto”.
- Focus Group: profesores. La hipótesis de trabajo es la siguiente: “Los docentes tienen preferencia por la metodología de trabajo en el aula propuesta en la investigación para la resolución de problemas

aritméticos sobre el trabajo basado en el libro de texto”.

- Aplicación informática RPA.

Población y muestra

La población de alumnos de Educación Primaria de centros públicos en Castilla y León durante el curso académico 2010-2011 es de 83.229. La muestra de 483 alumnos, representa el 0,58% de la población.

La fracción de muestreo f indica que investigamos el 0,6% de la población. El factor de elevación f_c implica cada alumno en la muestra representa a 172 alumnos de la población.

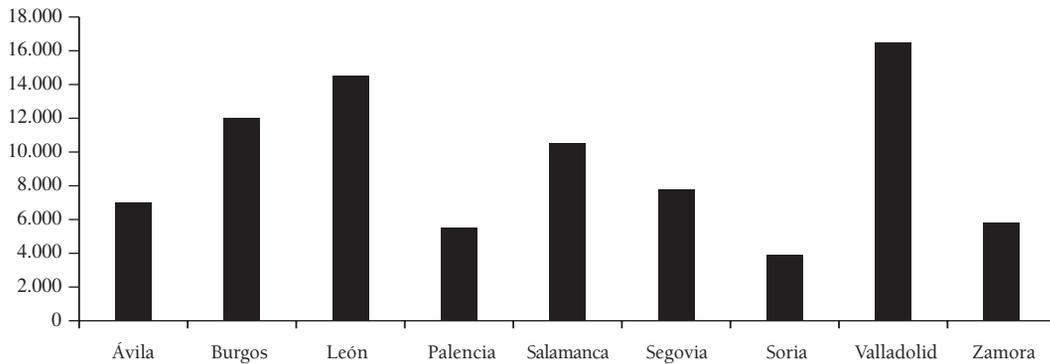
En la figura 5 se muestra la población de Educación Primaria por provincias en Castilla y León durante el curso 2010-2011.

En la figura 6 se muestra la participación del alumnado por centro.

En la figura 7 se muestra la distribución del alumnado por curso que concluye el proyecto.

La mortalidad experimental del alumnado es de 20 sujetos debido a causar baja en el centro o por falta de asistencia por enfermedad los días en que se realizó el cuadernillo 2 durante el mes de mayo de 2011.

FIGURA 5. Población por provincias



Fuente: Junta de Castilla y León.

FIGURA 6. Participación del alumnado que concluye la investigación por centro y localidad (casos: 463)

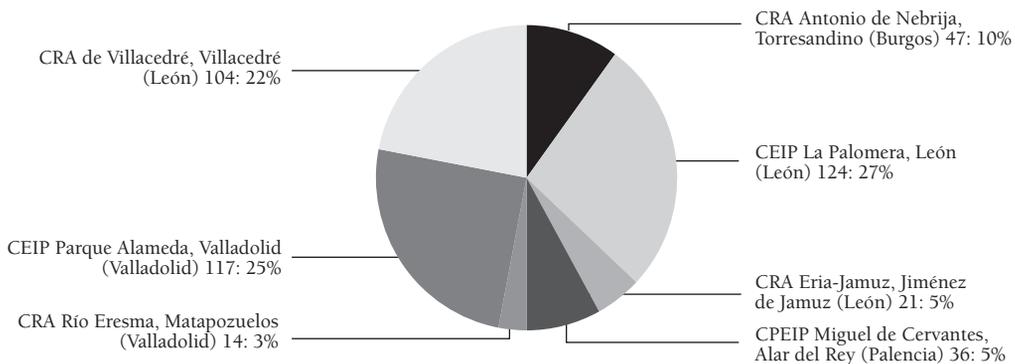
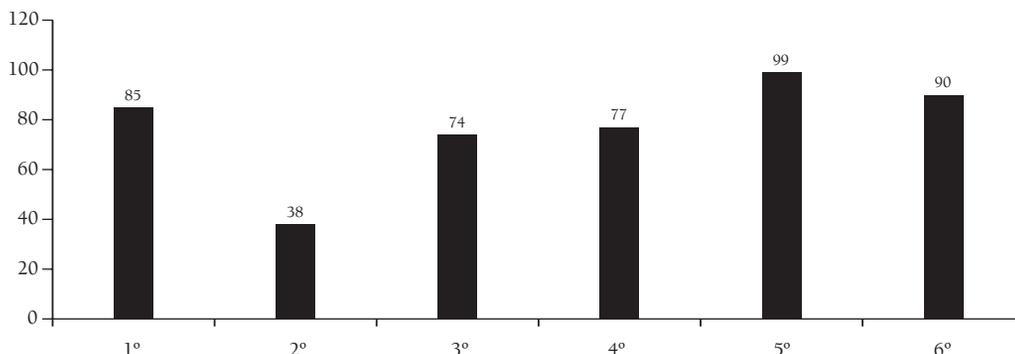


FIGURA 7. Alumnado por curso que ha completado el proyecto (casos: 463)



Categorización de respuestas

Todas las respuestas que ofrecen los alumnos a los problemas se categorizan en cuatro grupos del siguiente modo como se indica en la figura 8.

FIGURA 8. Categorización de respuestas de los alumnos

Respuesta A	AP-AR: acierto en planteamiento y acierto en resultado
Respuesta B	EP-ER/B: error en el planteamiento y error en el resultado y respuestas en blanco
Respuesta C	EP-AR: error en el planteamiento y acierto en el resultado
Respuesta D	AP-ER: acierto en el planteamiento y error en el resultado

De tal forma que las variables de estudio se han denominado:

- C1a= número de problemas con acierto en el planteamiento y resultado del cuadernillo 1.
- C2a= número de problemas con acierto en el planteamiento y resultado del cuadernillo 2.
- Dif_a = C2a-C1a.

E igualmente son utilizadas las categorías de respuesta “b”, “c” y “e” para ambos cuadernillos (C1 y C2).

Resultados

Análisis estadístico descriptivo de los resultados obtenidos por el alumnado

Comparamos las medias por cursos obtenidas en el cuadernillo 1 y cuadernillo 2 según las cuatro categorías de respuesta, tal y como se indica en la figura 9, donde se observa la mejora en los resultados después de la aplicación del software RPA.

FIGURA 9. Comparación de medias por cursos en C1 y C2

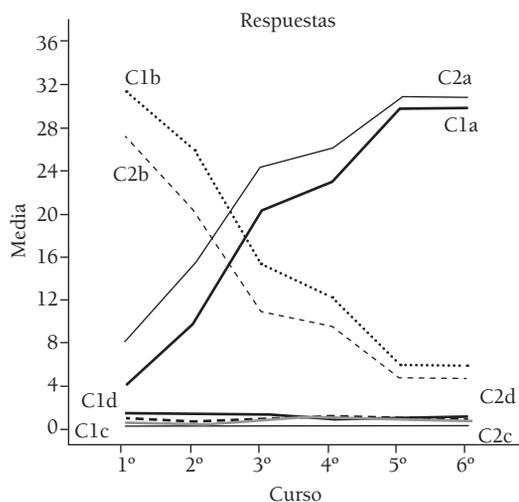
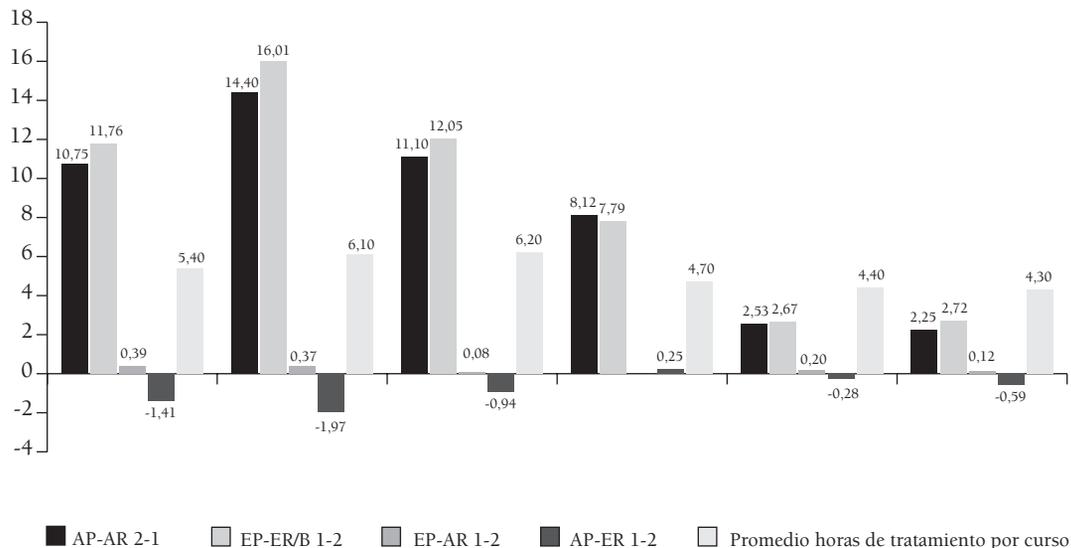


FIGURA 10. Diferencia por respuestas entre C1 y C2. Tratamiento (%)

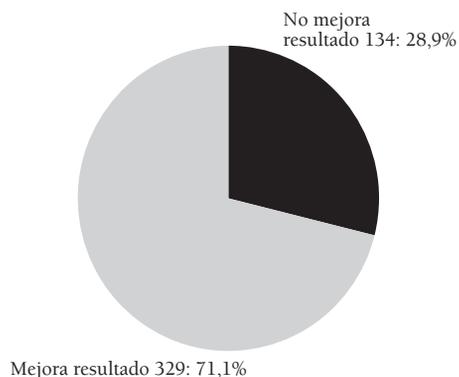


En la figura 10 se muestra el análisis de la diferencia de resultados entre ambos cuadernillos (C1 y C2), el cual indica que todos los cursos han mejorado sus respuestas “A” y particularmente el curso 2º ha sido el que mayor mejora ha demostrado en las respuestas “A” con un aumento del 14,40%. En segundo lugar, el curso de 3º con un aumento del 11,19%. En tercer lugar, el curso 1º con un aumento del 10,75%. En cuarto lugar, el 4º curso con un aumento del 8,12%. En quinto lugar, el 5º curso con un aumento del 2,52% y finalmente el curso que menos mejora es 6º con un aumento del 2,25% de respuestas A. El promedio de horas de trabajo con el programa por curso es de 5 horas, siendo 3º el curso que más tiempo ha dedicado con 6,2 horas de media y el que menos ha sido 6º curso con 4,3 horas.

En la figura 11, se muestra cómo los alumnos/as que mejoran sus resultados son el 71,1%

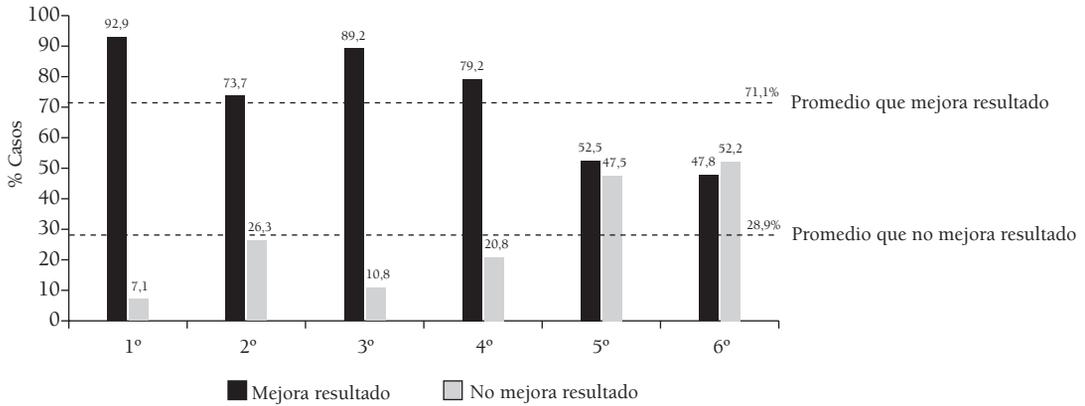
y los que no mejoran sus resultados son el 28,9%.

FIGURA 11. Evolución de resultados del alumnado



En la figura 12, se observa que el curso que más alumnos/as tiene que han mejorado resultado de C1 a C2 es 1º, seguido de 3º, 4º, 2º, 5º y 6º.

FIGURA 12. Evolución de resultados del alumnado por cursos (%)



Resultados obtenidos por los alumnos

Todos los cursos y los centros escolares han experimentado mejora en sus medias de respuesta (A).

En la tabla 4 se muestra el porcentaje de mejora de respuesta a por grupos.

TABLA 4. Porcentaje de mejora de respuesta A

Grupo 1º	10,8%
Grupo 2º	14,4%
Grupo 3º-4º	9,7%
Grupo 5º-6º	2,4%

Globalmente, los alumnos/as que mejoran sus resultados son el 71,1% y los que no mejoran sus resultados son el 28,9%.

TABLA 5. Evolución de los resultados de los alumnos C1 y C2 por cursos

Grupo 1º	92,2%
Grupo 2º	73,7%
Grupo 3º-4º	84,2%
Grupo 5º-6º	50,2%

En la tabla 5 se muestra el porcentaje de mejora de los cursos comparando los cuadernillos (C1 y C2).

Análisis estadístico inferencial sobre los cambios que provoca el tratamiento B en la variable dependiente

Comparamos dos medias en diseño de medidas repetidas. Las pruebas estadísticas permiten averiguar si el tratamiento B provoca cambios en la VD.

Por la vía paramétrica encontramos que:

- La prueba de normalidad indica que la variable $Dif_a=C2a-C1a$ no tiene normalidad, sin embargo, como el tamaño de la muestra es grande $n>30$ podemos aprovechar el análisis paramétrico, gracias al Teorema Central del Límite.
- Analizamos y comparamos medias con la “Prueba T para muestras relacionadas”. $C2a, C1a$.
- Donde la correlación de Pearson ($r=0.936$) es positiva y muy alta, siendo significativo P. Podemos deducir que existe relación lineal estadísticamente significativa entre las dos variables $C2a$ y $C1a$.
- El estadístico t toma un valor de 13,987 con una significación bilateral de

1.30E-210 por lo que podemos rechazar la hipótesis nula.

- Conclusión por vía paramétrica: el tratamiento A y el tratamiento B ejercen distinta influencia sobre el número de niveles de problemas aritméticos resueltos correctamente por los alumnos.

Por la vía no paramétrica tenemos que:

- Se utiliza la prueba de rangos señalados y pares igualados para dos muestras dependientes o de Wilcoxon (para muestras grandes, mayores de 25 sujetos), que obtienen un alto grado de significación al tener en cuenta las pérdidas o ganancias en la diferencia entre los dos resultados obtenidos por cada sujeto. Compara la VD antes y después del tratamiento B.
- Al comparar la distribución normal de variables observamos que no tienen distribución normal por ser la diferencia de P-valor < 0.05 .
- Al aplicar la prueba de rangos señalados y pares igualados para dos muestras dependientes de Wilcoxon tenemos que el valor de P es menor que 0.05, por lo cual se acepta H_a y se rechaza H_0 .
- Interpretando el valor de P que tiene una probabilidad de error 4.48E-35 podemos concluir que el resultado obtenido después del tratamiento B difiere de los resultados obtenidos antes del tratamiento.
- Conclusión por la vía no paramétrica: existe diferencia estadísticamente significativa entre el nivel de RPA del alumnado de EP entre el principio de la Investigación y el final de la misma.

Por tanto, el tratamiento B provoca cambios en la variable dependiente, aceptamos la hipótesis alterna. En el análisis inferencial, tanto por la vía paramétrica con la prueba t, como por la vía no paramétrica con la prueba de Wilcoxon, la conclusión es la misma, es decir, el tratamiento A y el tratamiento B ejercen

distinta influencia sobre el número de niveles de problemas aritméticos resueltos correctamente por los alumnos por lo que aceptamos la hipótesis alterna (H_a): "El nivel de RPA del alumnado de EP es menor al inicio de la investigación que a su finalización" y rechazamos la hipótesis nula.

Comparación entre los seis cursos

¿Difieren significativamente unos de otros o son homogéneos respecto la variable respuesta (A) en C1 y C2?

Comparamos los seis cursos en la variable respuesta (A) antes y después del tratamiento B mediante ANOVA de un factor.

Los resultados son:

- Para el cuadernillo 1 (C1) los resultados muestran cinco grupos del siguiente modo:
 - Difieren significativamente: 1º, 2º, 3º, 4º.
 - Homogéneos: (5º-6º).
- Para el cuadernillo 3 (C2) los resultados muestran cuatro grupos del siguiente modo:
 - Difieren significativamente: 1º, 2º.
 - Homogéneos: (3º-4º), (5º-6º).

Valoraciones sobre la metodología RPA

La escala Likert, de actitud hacia la investigación para docentes. Siendo el punto de inflexión 3,5, la media del grupo es 5,4 (muy positiva). Para los alumnos de ciclo 3º es 4,5 (positiva).

El Focus Group con docentes y con alumnos, en ambos casos, confirman la hipótesis de trabajo, prefieren trabajar en la RPA desde la propuesta metodológica de la investigación.

Construcción de la nueva secuenciación por grado de dificultad, de problemas aritméticos según su estructura semántica

Una vez secuenciados las diferentes tipologías de problemas aritméticos bajo criterio de la

dificultad que ha supuesto resolverlos para los alumnos, y observando que no coincide su orden con la propuesta realizada en el programa informático RPA, obtenemos los siguientes resultados que se muestran en la tabla 6:

TABLA 6. Nueva secuenciación de problemas aritméticos por dificultad

Nivel	Secuencia	Curso	Tipología
1	CA1	1º	Suma y resta. Cambio
2	CA2	1º	Suma y resta. Cambio
3	CO1	1º	Suma y resta. Combinación
4	CM4	1º	Suma y resta. Comparación
5	CM2	1º	Suma y resta. Comparación
6	CA3	1º	Suma y resta. Cambio
7	CA4	2º	Suma y resta. Cambio
8	MR3	2º	Multipl. y división. Multiplicación-Razón
9	MR2	2º	Multipl. y división. Multiplicación-Razón
10	DPR	2º	Multiplicación y división. División-Razón.
11	MCM en +	2º	X y /. Multiplicación - comparación en más
12	MR1	3º-4º	Multipl. y división. Multiplicación-Razón
13	DPCM en +	3º-4º	X y /. División partición comparación en más
14	CM3	3º-4º	Suma y resta. Comparación
15	IG3	3º-4º	Suma y resta. Igualación
16	DCF	3º-4º	X y /. División cuotición fórmula.
17	IG5	3º-4º	Suma y resta. Igualación
18	IG1	3º-4º	Suma y resta. Igualación
19	MF	3º-4º	X y /. Multiplicación fórmula
20	CO2	3º-4º	Suma y resta. Combinación
21	MCO PCI	3º-4º	X y /. Multipl.-combinac. o producto cartesiano
22	CM5	3º-4º	Suma y resta. Comparación
23	CA6	3º-4º	Suma y resta. Cambio
24	DCR	3º-4º	Multiplicación y división. División-Razón
25	CM1	3º-4º	Suma y resta. Comparación
26	IG2	3º-4º	Suma y resta. Igualación
27	DPCM en -	3º-4º	X y /. División partición en menos
28	IG6	3º-4º	Suma y resta. Igualación

TABLA 6. Nueva secuenciación de problemas aritméticos por dificultad (cont.)

Nivel	Secuencia	Curso	Tipología
29	DCO PC2	3°-4°	X y /. Divis.-combinac. o producto cartesiano
30	CA5	3°-4°	Suma y resta. Cambio
31	IG4	5°-6°	Suma y resta. Igualación
32	CM6	5°-6°	Suma y resta. Comparación
33	DCCM en -	5°-6°	X y /. División cuotición en menos
34	DPF	5°-6°	X y /. División partición fórmula
35	DCCM en +	5°-6°	X y /. División cuotición comparación en más
36	MCM en -	5°-6°	X y /. Multiplicación - comparación en menos

Conclusiones

Los objetivos propuestos en la investigación han sido llevados a cabo satisfactoriamente.

El programa informático elaborado para la trabajar en el aula la resolución de problemas aritméticos en función de su estructura semántica denominado RPA ha recibido un alto grado de aprobación por parte de docentes y alumnado, según se ha mostrado en las valoraciones realizadas por los mismos en los “focus group” y “escalas Likert” realizados respectivamente. Por tanto, la metodología de trabajo en el aula con el programa informático es valorada prioritariamente sobre la metodología de trabajo exclusivo con libro de texto.

Por otra parte, como hemos indicado en los resultados, el tratamiento A y el tratamiento B ejercen distinta influencia sobre el número de niveles de problemas aritméticos resueltos correctamente por los alumnos por lo que aceptamos la hipótesis alterna (Ha): “El nivel de RPA del alumnado de EP es menor al inicio de la investigación que a su finalización”. El alumnado obtiene mejores resultados en su competencia resolutora después del tratamiento B (trabajo con el software RPA)

Finalmente, los resultados obtenidos por los alumnos en los cuadernillos muestran que las

categorías presentadas por orden de dificultad en el software RPA no son coincidentes. Por tanto, se construye una nueva secuenciación en la dificultad de las categorías de los problemas aritméticos a partir de los resultados obtenidos por los alumnos según se muestra en la tabla 6.

Discusión

La validez interna de nuestro diseño tiene dos puntos fuertes. Por un lado, la igualación en cuanto a los sujetos y, por otro, una mortalidad experimental baja.

Sin embargo, como puntos débiles aparecen las variables en concepto historia, maduración y profesor, debido a las cuales no podemos atribuir con certeza los cambios observados a la VI (tratamientos A y B).

En relación a la validez externa cabe destacar que los resultados de la investigación avalan el uso del programa RPA en el aula, sin embargo, la muestra de la población escolar es no probabilística, por ello queda sin efecto la misma.

En cuanto a las limitaciones de la investigación podemos destacar:

- Posibles interacciones entre los tratamientos, ya que trabajamos en el ámbito del aprendizaje.
- El procedimiento experimental puede afectar a los profesores que conocen la investigación aunque no a los alumnos que la desconocen.
- Realizar nuevas investigaciones con muestra probabilística y grupo de control. Procurando lograr grupos equivalentes.
- Investigar en un nuevo campo como es el de los mayores, de tal forma que el programa informático RPA sea aplicado a personas que precisen de entrenamiento mental para mantener unas condiciones óptimas de los procesos cognitivos básicos y prevenir la aparición o paliar los efectos de las enfermedades neurodegenerativas.

Líneas futuras de investigación que podemos marcar son:

- Investigar a partir de la nueva secuencia de problemas aritméticos obtenida en la

Referencias bibliográficas

- AGUILAR VILLAGRÁN, M. y MARTÍNEZ MONTERO, J. (1998). Los Problemas Aritméticos Elementales Verbales (PAEV) de una operación formulados con números muy pequeños.
- AGUILAR VILLAGRÁN, M. y NAVARRO GUZMÁN, J. I. (2000). Aplicación de una estrategia de resolución de problemas matemáticos en niños. *Revista de psicología general y aplicada, Revista de la Federación Española de Asociaciones de Psicología*, 53 (1), 63-83.
- CANTERO CAJA, A.; HIDALGO PÉREZ, Á.; MERAYO VALLE, B.; PRIMO RIESCO, F.; SANZ SANZ, A. y VEGA MARTÍNEZ, A. (2004). En Junta de Castilla y León (ed.), *Resolución de problemas aritméticos en Educación Primaria* (1ª ed.) Recuperado de <http://www.educa.jcyl.es/profesorado/es/materiales-jcyl/resolucion-problemas-aritmeticos-educacion-primaria>
- CARRASUMADA SERRANO, P. y SILVESTRE BENACH, N. (1996). *Proceso de resolución de problemas aritméticos en el alumnado sordo: aspectos diferenciales respecto al oyente*. Universidad Autónoma de Barcelona.
- CASTRO MARTÍNEZ, E. (2008). Resolución de problemas: Ideas, tendencias e influencias en España.
- JIMÉNEZ VIVAS, A. (2003). *Diagnóstico en educación: modelo, técnicas e instrumentos*. Amarú.
- KRULIK, S. y RUDNICK, J. A. (1987). *Problem solving: A handbook for teachers* (2ª ed.). Allyn and Bacon.
- LESTER, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), 660-675.
- Ley de Instrucción Pública. Ley Moyano (1857).
- Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (2006).
- LUCAS LEDESMA, M. (2010a). *Resolución de Problemas Aritméticos* Recuperado de <http://mimosa.pntic.mec.es/mlucas2/rpa>
- Vídeo tutorial del software RPA: Resolución de Problemas Aritméticos*. Lucas Ledesma, M. (Director). (2010b). [Videograbación] Youtube: Recuperado de <http://www.youtube.com/watch?v=C8PfczIyVLs>
- LUCENO CAMPOS, J. L. (1999). La resolución de problemas aritméticos en el aula. Archidona Málaga: Aljibe.
- NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, NCTM. (2004). An Agenda for Action. Recommendations for School Mathematics for the 1980s.
- OCDE y MINISTERIO DE EDUCACIÓN ESPAÑA (2005). *PISA 2003 Resultados. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Informe Español*. Madrid.
- ORRANTIA RODRÍGUEZ, J.; GONZÁLEZ, L. B. y VICENTE MARTÍN, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y aprendizaje*, 28 (4), 429-451.

Abstract

Solving arithmetic problems using an innovative technological methodology

INTRODUCTION. This paper summarises the salient details of my doctoral thesis on the classification of arithmetic problems according to their semantic structure, and explains how an innovative methodology based on the use of learning and communication technologies can be used in teaching. **METHODS.** An innovative educational software called RPA was developed, which presents a teaching sequence based on the difficulty of the material. This software can be accessed at: <http://mimosa.pntic.mec.es/mlucas2/rpa>. The research consisted of using the RPA software for teaching in seven schools located in four provinces in Castile and León (40 teachers and 483 students). This was an Educational Innovation Project funded entirely by the Ministry of Education of the Castile and León Regional Government. A simple design with repeated measures was employed, where treatment A consisted of methodological use of the textbook and treatment B consisted of using the RPA software-based methodology. **RESULTS.** The initial classification proposed by the RPA software for solving arithmetic problems according to their semantic structure was not consistent with the degree of difficulty experienced by the students participating in the research. Consequently, a new classification of arithmetic problems according to semantic structure is proposed which reflects the degree of difficulty experienced by Primary Education students. Nevertheless, 71.1% of the students who participated obtained better results after exposure to the RPA software-based methodology. **DISCUSSION.** Limitations of the research include possible interactions between treatments. Future lines of research would include further research using probability samples and control groups, together with the effect of the RPA software, with older people as a preventive activity against neurodegenerative diseases.

Keywords: *Primary Education, Teaching, Education Theory and Methods, Computer Assisted Learning.*

Résumé

La résolution de problèmes arithmétiques par une méthodologie technologique et innovante

INTRODUCTION. Cet article résume les aspects pertinents de ma thèse doctorale, réalisée sur la classification des problèmes arithmétiques selon leur structure sémantique et sur la manière dont on peut aborder sa didactique à travers une méthodologie innovante basée sur l'utilisation des technologies de l'apprentissage et de la communication. **MÉTHODE.** Un logiciel éducatif innovant, nommé RPA, est en développement et produit une séquence didactique en fonction de la difficulté de ces derniers. Ce logiciel est accessible sur <http://mimosa.pntic.mec.es/mlucas2/rpa/>. La recherche est réalisée à travers l'application du logiciel RPA aux méthodes d'enseignement de sept centres d'éducation de quatre provinces de la Communauté Autonome de Castilla y León (40 professeurs et 483 élèves), dans le cadre d'un Projet d'Innovation Educative financé en totalité par le Conseil de l'Éducation de la Junta de Castilla y León. On utilise un modèle simple de mesures répétées, où le traitement A est l'application méthodologique du manuel et le traitement B est la méthodologie basée sur le logiciel RPA. **RÉSULTATS.** En conclusion, la classification initiale proposée par le logiciel RPA résolvant les problèmes arithmétiques selon leur structure sémantique ne coïncide pas avec le degré de difficulté que montre l'ensemble des élèves participant à l'étude. On propose alors une nouvelle classification des problèmes arithmétiques selon sa structure sémantique, en fonction de

la difficulté qu'ils présentent pour un élève d'enseignement primaire. D'autre part, 71,1% des élèves participants ont amélioré leurs résultats suite au traitement par la méthodologie basée sur le logiciel RPA. **DISCUSSION.** Comme limites aux recherches, il faut souligner les possibles interactions entre traitements. Les prochains axes de recherche se dirigent vers la réalisation de nouvelles études comportant un échantillon aléatoire et un groupe témoin, ainsi que vers l'étude de l'effet du logiciel RPA comme action préventive contre les maladies neurodégénératives dans le cas des personnes âgées.

Mots clés: *Education Élémentaire, Pédagogie, Théorie et Méthodes Educatives, Enseignement Programmé.*

Perfil profesional de los autores

Manuel Lucas Ledesma

Doctor en Investigación en Ciencias Humanas y Sociales por la Universidad Pontificia de Salamanca. Profesor asociado en la Facultad de Educación de la Universidad de León en el Dpto. de Didáctica General, Específicas y Teoría de la Educación. Ponente del Centro de Formación del Profesorado e Innovación Educativa de León. Tutor a distancia Plan Regional de Formación del Profesorado de la JCyL para la formación a distancia del profesorado de Castilla y León, Centro de Recursos y Formación del Profesorado en TIC.

Correo electrónico de contacto: mclucl@unileon.es

Vidal Alonso Secades

Doctor en Informática, ocupa la Cátedra de Estructura de Datos y de la Información en la Universidad Pontificia de Salamanca, donde ostenta el cargo de Vicerrector de Economía. Impartió la lección inaugural en el 2005/2006 y dentro del Grupo de investigación de "Tecnologías de la Información", ha participado como IP, en la Dirección de Proyectos de I+D+i del Plan AVANZA financiados por el Ministerio de Industria, Turismo y Comercio. Dirige proyectos de Innovación Educativa en NNTT financiados por la Junta de Castilla y León.

Correo electrónico de contacto: valonsose@upsa.es